Annales des Concours

PSI
Mathématiques
2014

Sous la coordination de

Guillaume Batog
Professeur en CPGE
Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Vincent Puyhaubert
Professeur en CPGE
Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Par

Walter Appel
Professeur en CPGE

Céline Chevalier
Enseignant-chercheur à l'université

Sylvain De Moor
ENS Cachan

Christophe Fiszka
ENS Cachan

Thierry Limoges
Professeur agrégé

Tristan Poullaouec
Professeur en CPGE

Yvon Vignaud
Professeur en CPGE

Principales disparitions du programme de mathématiques en PSI

Algèbre générale, linéaire et bilinéaire

- dualité
- comatrice
- structures algébriques usuelles : groupes, anneaux, corps, morphismes
- groupe symétrique
- idéal des polynômes annulateurs
- formes quadratiques
- adjoint d'un endomorphisme, endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs
- espaces hermitiens, produits scalaires complexes

Géométrie

- transformations et isométries affines
- coniques et quadriques
- paramétrage admissible d'un arc paramétré, abscisse curviligne, courbure

Fonctions

- fonctions hyperboliques réciproques Argch , Argsh et Argth
- $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes
- inégalité des accroissements finis et formules de Taylor pour les fonctions à valeurs vectorielles
- matrice jacobienne
- inégalité des accroissements finis pour les fonctions de plusieurs variables
- les dérivées partielles sont d'ordre au plus 2 pour des fonctions d'au plus 3 variables

Topologie, suites et séries

- séries de Fourier
- normes subordonnées
- critères de convergence de Cauchy
- compacité
- approximation uniforme des fonctions d'une variable réelle

Intégrales

- intégrales des fonctions à valeurs vectorielles
- intégrales doubles et formule de Fubini d'échange des intégrales
- intégrales curvilignes d'une forme différentielle

Équations différentielles

- équations différentielles non linéaires
- wronskien
- méthode de variation des constantes
- équations différentielles sous forme non résolue, raccordements

Sommaire

Mines-Ponts

Centrale-Supélec

Formulaires

E3A Maths A PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Gauthier Gidel (ENS Ulm) et Benjamin Monmege (ENS Cachan).

Ce problème, qui combine algèbre (polynômes et espaces euclidiens) et analyse (calcul différentiel et intégral), se concentre sur les polynômes de Tchebychev, sujet d'étude ô combien classique, sans toutefois les nommer, ce qui est pour le moins surprenant. Il est constitué de trois parties qui peuvent être abordées indépendamment les unes des autres, car tous les résultats utiles apparaissent clairement dans l'énoncé.

- Dans la première partie, on retrouve la définition et les propriétés fondamentales des polynômes de Tchebychev.
- Dans la deuxième partie, on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et l'on montre – entre autres propriétés – que les polynômes de Tchebychev en constituent une base orthonormale.
- Dans la troisième et dernière partie, on utilise les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux racines de l'un des polynômes de Tchebychev pour simplifier le calcul du produit scalaire.

Le sujet ne comporte pas de difficulté particulière et fait appel à des techniques et notions très classiques, qui ne devraient pas surprendre un candidat maîtrisant le programme... et ne manifestant pas d'intolérance à la trigonométrie, outil incontournable dès que les polynômes de Tchebychev sont dans les parages. De plus, l'énoncé est d'une longueur raisonnable, constitué de questions précises et bien articulées, ce qui permet d'envisager de le traiter dans le temps imparti.

Indications

Partie 1.

2 On peut utiliser les formules d'addition des sinus et des cosinus, ainsi que la formule de Moivre.

4 Les formules d'addition mènent droit au but.

5 Effectuer une récurrence double sur n.

6 Établir la liberté de cette famille grâce au résultat de la question précédente.

7 Une nouvelle récurrence double conduit rapidement au résultat.

Partie 2.

1.2 Utiliser les formules d'addition afin de linéariser l'intégrande.

1.3 Employer le résultat de la question 7, partie 1, puis effectuer le changement de variable $t = \cos\theta$ afin de récupérer les résultats de la question précédente.

1.5 Partir de la division euclidienne de T_n par X^n, puis calculer $(\mathrm{T}_n \mid \mathrm{T}_n)$.

2.2 Exprimer de deux manières différentes $(\mathrm{P} \mid \mathrm{T}_n)$.

2.3 Utiliser les résultats des questions 1.3 et 2.1.

2.4 Dans quel cas l'inégalité précédente est-elle une égalité ?

Partie 3.

2.1 Prouver que c'est une famille libre en évaluant une combinaison linéaire nulle en x_j, pour $j \in [\![1\,;\,n]\!]$.

2.2 Employer la même idée pour déterminer les coordonnées de G dans la base $\mathscr{L}$.

2.3b Combiner les résultats des questions 2.2 et 2.3a.

2.4b Ne pas perdre de vue que T_n est divisible par $\mathrm{X} - x_k$, ce qui permet de montrer que ψ_k est un polynôme.

2.4c Utiliser des développements limités à l'ordre 1 pour calculer la limite. Ensuite, effectuer le changement de variable $t = \cos\theta$ dans l'intégrale définissant u_n.

2.4d Partir du calcul de $u_{j+2} + u_j$, en pensant aux relations établies au cours de la question 4, partie 1. On peut aussi user de l'identité $ab - cd = a(b-d) + d(a-c)$.

3 Combiner les résultats des questions 2.3b et 2.4e.

Partie 1.

$\boxed{1}$ On sait que les fonctions Arccos et cos sont continues sur $[-1\,;1]$ et sur $\mathbb{R}$ respectivement. De ce fait, en tant que composée de fonctions continues,

$$\boxed{\text{La fonction } c_n \text{ est continue sur } [-1\,;1] \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

$\boxed{2}$ Soit $x \in [-1\,;1]$. Alors

$$\boxed{c_0(x) = \cos(0) = 1}$$

De plus, par définition de la fonction Arccos, il vient

$$\boxed{c_1(x) = \cos(\text{Arccos } x) = x}$$

> Rappelons que la fonction cos décrit une bijection de $[0\,;\pi]$ sur $[-1\,;1]$, dont la bijection réciproque est la fonction Arccos.

Pour tout réel θ, on a de plus

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

donc
$$\boxed{c_2(x) = \cos(2\,\text{Arccos } x) = 2x^2 - 1}$$

Enfin, d'après la formule de Moivre, on a pour tout réel θ

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \text{Re}\,\big((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3\big)\\
&= \text{Re}\,\big(\cos^3\theta + 3\mathrm{i}\cos^2\theta\,\sin\theta - 3\cos\theta\,\sin^2\theta - \mathrm{i}\sin^3\theta\big)\\
&= \cos^3\theta - 3\cos\theta\,(1-\cos^2\theta)\\
\cos(3\theta) &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

si bien que
$$\boxed{c_3(x) = \cos(3\,\text{Arccos } x) = 4x^3 - 3x}$$

> On peut également retrouver l'expression de $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ à l'aide des formules d'addition des sinus et cosinus, en écrivant
>
> $$\begin{aligned}
> \cos(3\theta) &= \cos(2\theta)\cos\theta - \sin(2\theta)\sin\theta\\
> &= (2\cos^2\theta - 1)\,\cos\theta - 2\sin^2\theta\,\cos\theta\\
> &= (2\cos^2\theta - 1)\,\cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\,\cos\theta\\
> \cos(3\theta) &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
> \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Notons déjà que les fonctions affines c_0 et c_1 ont pour courbes respectives la droite horizontale d'équation $y = 1$ et la première bissectrice des axes d'équation $y = x$.

La courbe de c_2 est quant à elle la parabole d'équation $y = 2x^2 - 1$: sa concavité est donc dirigée vers le haut et elle a pour sommet le point $\text{S}(0; -1)$.

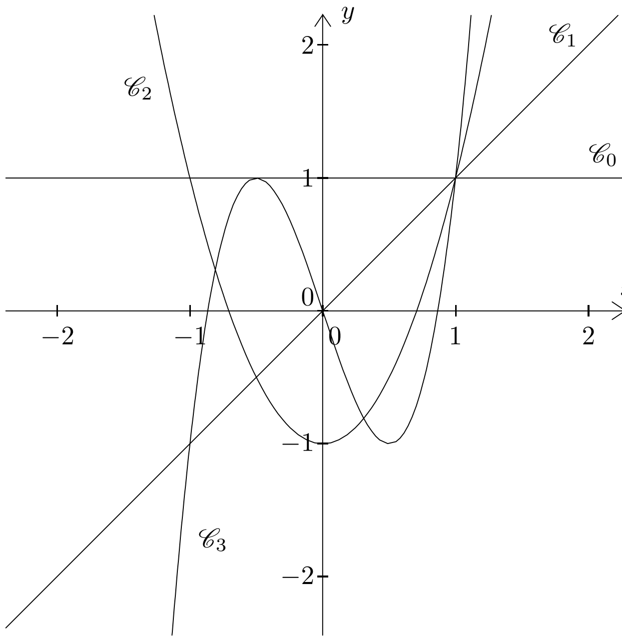
Enfin, la fonction polynomiale c_3 est dérivable et, pour tout $x \in [-1\,;1]$,

$$c_3{}'(x) = 12x^2 - 3 = 12\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 12\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

ce qui permet de dresser son tableau de variations :

x	-1		$-1/2$		$1/2$		1
$c_3{}'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
			1				1
$c_3(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-1				-1		

Voici les courbes $\mathscr{C}_i$ de ces quatre fonctions dans un repère orthonormal :



4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [-1\,;1]$ et $\theta = \operatorname{Arccos} x$; alors

$$\begin{aligned} c_{n+1}(x) &= \cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta + \theta) \\ &= \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned} c_{n-1}(x) &= \cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta - \theta) \\ &= \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta \end{aligned}$$

donc
$$\begin{aligned} c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) &= 2\cos(n\theta)\cos\theta \\ &= 2c_n(x)\,c_1(x) \end{aligned}$$

d'où, d'après la question 2,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \forall\, x \in [-1\,;1] \qquad c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) = 2xc_n(x)}$$

> On pouvait retrouver ce résultat en employant directement la formule de factorisation des cosinus
>
> $$\forall\,(p,q) \in \mathbb{R}^2 \qquad \cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

E3A Maths B PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Yvon Vignaud (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université) et Nicolas Martin (ENS Lyon).

Ce sujet est composé de trois exercices indépendants. Bien que de nombreuses questions soient des applications directes du cours, il comporte quelques questions difficiles d'un point de vue théorique ou technique et couvre des notions très diverses du programme de deuxième année : réduction de matrices, intégrales impropres convergentes, intégrales à paramètre, séries numériques, séries de Fourier, séries de fonctions, fonctions de plusieurs variables, équations différentielles linéaires.

- Dans le premier exercice, on calcule l'exponentielle M d'une matrice carrée d'ordre 3, avant de déterminer à quelle condition M^2 représente une symétrie vectorielle.
- Dans le deuxième exercice, on commence par développer en série de Fourier la fonction $x \mapsto |\sin(x)|$. Ce développement permet ensuite d'écrire

  $$\rho_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(mx)|}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

  comme la somme d'une série numérique. Enfin, on obtient un équivalent de ρ_m à l'aide d'un encadrement par des sommes partielles de séries numériques, sur le principe de la comparaison entre séries et intégrales. Le fait que les séries manipulées dépendent d'un paramètre m ne change pas les méthodes mais peut représenter une difficulté en soi.
- Le troisième exercice s'intéresse aux équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n. On établit d'abord trois formules utiles pour la suite : la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral, une formule de convolution, puis une formule de dérivation pour une fonction de la forme

  $$\mathrm{F}(x) = \int_c^{\mathrm{G}(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

  Après ces préliminaires, on obtient à l'issue de la première partie une expression des solutions de l'équation $y^{(n)} = \varphi$. Dans la deuxième partie, on trouve une solution particulière

  $$g : x \mapsto \int_0^x s(x-t)\psi(t)\,\mathrm{d}t$$

  de l'équation $\qquad y^{(n)} + c_1 y^{(n-1)} + \ldots + c_n y = \psi$

  à partir d'une solution s de l'équation homogène associée. Enfin, l'exercice se termine par une application de la deuxième partie à la résolution explicite de l'équation différentielle $y'' + y = \alpha$ avec α une fonction triangle.

Indications

Exercice 1

2 Factoriser le polynôme caractéristique de A.

3 Discuter selon la parité de k.

4 Montrer que $(\mathrm{I}_3, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$ est une base de F.

6 Déterminer les limites des composantes de S_n.

9 Remarquer que M^4 est une rotation.

Exercice 2

P.1 Séparer les contributions pour k pair ou impair dans $\sum\limits_{k=0}^{2n+1} \dfrac{1}{k}$.

P.2 Utiliser le critère de Riemann.

1.2 Linéariser les fonctions trigonométriques.

2 Exploiter le théorème de convergence normale des séries de Fourier.

3 Appliquer le résultat de la question 2 en $x = 0$.

4 Utiliser $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$ ainsi que les questions 2 et 3.

5.1 Montrer que l'intégrande se prolonge par continuité.

5.2 Obtenir une somme télescopique via $2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$.

5.4 Utiliser le théorème d'intégration terme à terme à la série de fonctions $\sum u_n$ où

$$u_n : x \longmapsto \frac{8}{\pi(4n^2-1)} \, \frac{\sin^2(mnx)}{\sin x}$$

6.1 Déterminer un équivalent de $\sin x - x$ lorsque x tend vers 0.

7.3 Appliquer la relation de Chasles.

7.4 Encadrer v_n entre $2/(n+1)\pi$ et $2/n\pi$.

Exercice 3

P.1.b Utiliser un changement de variables affine.

P.3.1 Pour la dérivée partielle selon x, appliquer le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale ; on utilisera notamment l'hypothèse « f de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à x » qui signifie ici

$$(x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est continue sur } \mathrm{K} = [\,a\,;b\,] \times [\,c\,;d\,]$$

P.3.2 Dériver une composée de fonctions de plusieurs variables.

II.2 Intégrer par parties.

II.3 Appliquer la formule de dérivation de la question P.3.2.

II.4 Intégrer par parties à nouveau.

II.7 Appliquer les résultats de la question II.6 avec $c_k = 0$ et $\psi = \varphi$ pour obtenir la solution particulière

$$g : x \mapsto \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Conclure à l'aide de la formule de Taylor en 0 pour les polynômes.

A.2 Appliquer les résultats de la partie II à $n = 2$, $\psi = \alpha$, $c_1 = 0$ et $c_2 = 1$.

Exercice 1

Exo1-1 On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dispose alors du

Théorème de Cayley-Hamilton : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors le polynôme caractéristique χ_{M} d'une matrice carrée $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un polynôme annulateur de M.

Calculons le polynôme caractéristique χ_{A} de la matrice A en remarquant qu'elle est diagonale par blocs :

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{XI}_3 - \mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & 1 & 0 \\ -1 & \mathrm{X} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \mathrm{X} \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{X} & 1 \\ -1 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2 + 1) = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{X}^3 + \mathrm{X} \text{ est un polynôme annulateur non nul de A.}}$

Rappelons qu'un polynôme P est annulateur d'une matrice carrée M lorsque $\mathrm{P}(\mathrm{M}) = 0$. Ainsi, le résultat de cette question garantit $\mathrm{A}^3 + \mathrm{A} = 0$, ce que l'on peut vérifier facilement en calculant A^3.

Par ailleurs, on a cité la version matricielle du théorème de Cayley-Hamilton. De même, si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, alors le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u.

Exo1-2 Le polynôme $\mathrm{X}^2 + 1$ étant un facteur irréductible dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ du polynôme caractéristique de A, ce dernier n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Ceci impose que A n'est pas trigonalisable dans $\mathrm{E} = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; a fortiori,

$$\boxed{\text{A n'est pas diagonalisable dans E.}}$$

En revanche, $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2 + 1) = \mathrm{X}(\mathrm{X} - \mathrm{i})(\mathrm{X} + \mathrm{i})$

est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ et par suite

$$\boxed{\text{A est diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \text{ et sp A} = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}, 0\}.}$$

On rappelle que toute matrice carrée (complexe ou réelle) d'ordre n est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ puisque d'une part son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert-Gauss) et que d'autre part on dispose de l'équivalence :

$$\chi_{\mathrm{A}} \text{ scindé sur } \mathbb{K} \iff \text{A trigonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Pour la diagonalisabilité, on a l'implication

$$\chi_{\mathrm{A}} \text{ scindé à racines simples sur } \mathbb{K} \Longrightarrow \text{A diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

mais la réciproque est fausse en général. Signalons enfin une caractérisation de diagonalisabilité par les polynômes annulateurs : A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si elle possède un polynôme annulateur scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

Exo1-3 D'après la question 2, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $\operatorname{sp} \mathrm{A} = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}, 0\}$. En conséquence, on peut écrire

$$\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1} \quad \text{où} \quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P} \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$$

puis pour tout entier naturel k, on a $\mathrm{A}^k = \left(\mathrm{PDP}^{-1}\right)^k = \mathrm{PD}^k\mathrm{P}^{-1}$. Pour calculer les puissances impaires de D et donc de A, on peut remarquer que

$$\mathrm{D}^{2p+1} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}^{2p+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-\mathrm{i})^{2p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0^{2p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^p\,\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^p(-\mathrm{i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^p\mathrm{D}$$

de sorte que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{A}^{2p+1} = \mathrm{PD}^{2p+1}\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}[(-1)^p\mathrm{D}]\mathrm{P}^{-1} = (-1)^p\mathrm{PDP}^{-1} = (-1)^p\mathrm{A}$$

En multipliant par A, on en déduit les puissances paires de A :

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{A}^{2p+2} = \mathrm{A}^{p+1}\mathrm{A} = (-1)^p\mathrm{A}^2 \quad \text{où} \quad \mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{A}^k = \begin{cases} \mathrm{I}_3 & \text{si } k = 0 \\ (-1)^p\mathrm{A} & \text{si } k = 2p+1,\ p \in \mathbb{N} \\ (-1)^p\mathrm{A}^2 & \text{si } k = 2p+2,\ p \in \mathbb{N} \end{cases}}$$

Exo1-4 D'après les calculs menés à la question 3, les valeurs prises par $(\mathrm{A}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont $\mathrm{I}_3, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, -\mathrm{A}, -\mathrm{A}^2$. Mais alors

$$\mathrm{F} = \operatorname{Vect}(\mathrm{A}^k, k \in \mathbb{N}) = \operatorname{Vect}(\mathrm{I}_3, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, -\mathrm{A}, -\mathrm{A}^2) = \operatorname{Vect}(\mathrm{I}_3, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$$

Autrement dit, la famille $\mathcal{B} = (\mathrm{I}_3, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$ est génératrice de F. En conséquence,

$$\boxed{\mathrm{F} = \operatorname{Vect}(\mathrm{A}^k, k \in \mathbb{N}) \text{ est de dimension finie.}}$$

Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. De l'expression de A^2 obtenue en répondant à la question 3, il vient que pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$,

$$\alpha\mathrm{I}_3 + \beta\mathrm{A} + \gamma\mathrm{A}^2 = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha - \gamma & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = 0$$

ce qui implique que $\alpha = 0$ puis $\beta = \gamma = 0$. Ainsi, $(\mathrm{I}_3, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$ est une famille libre de F et par suite

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{B} = (\mathrm{I}_3, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2) \text{ est une base de } \mathrm{F} = \operatorname{Vect}(\mathrm{A}^k, k \in \mathbb{N}).}$$

Généralisons ce résultat à une matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quelconque possédant un polynôme annulateur $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ de degré $p \in \mathbb{N}^*$ et montrons que

$$\mathrm{F} = \operatorname{Vect}(\mathrm{A}^k, k \in \mathbb{N}) = \operatorname{Vect}(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}^{p-1}) \qquad (*)$$

CCP Maths 1 PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sylvain De Moor (ENS Cachan) ; il a été relu par Clément Mifsud (ENS Cachan) et Guillaume Batog (Professeur en CPGE).

Le problème s'intéresse à la longueur de courbes représentatives de fonctions de la variable réelle à valeurs réelles. Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un segment $[\,a\,;b\,]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, la longueur de sa courbe représentative peut être écrite sous la forme intégrale

$$\mathrm{L}(f) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

Le problème propose d'étudier quelques résultats sur cette application longueur L dans cinq parties indépendantes.

- La première partie consiste à calculer la longueur de courbes représentatives de fonctions f données en utilisant les techniques classiques du calcul d'intégrale sur un segment, comme l'intégration par parties ou le changement de variable. À deux reprises, il est demandé de vérifier par des considérations géométriques les résultats obtenus de façon analytique.
- La seconde partie s'intéresse à la longueur de l'arc d'hyperbole défini par la fonction $t \mapsto 1/t$ sur le segment $[\,1/2\,;1\,]$. Il s'agit d'exprimer cette longueur comme la somme d'une série numérique, ce qui permet ensuite d'en calculer une valeur approchée et de donner une majoration de l'erreur commise. Pour cela, on fait appel à la notion de série entière.
- La troisième partie propose d'étudier le comportement asymptotique de la suite des longueurs des graphes des fonctions puissances $(t \mapsto t^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ restreintes au segment $[\,0\,;1\,]$.
- Le but de la quatrième partie est de construire un exemple de cas pathologique d'une fonction continue sur un segment dont la courbe est de longueur infinie. Cette partie mobilise les connaissances sur les intégrales généralisées.
- Enfin, dans la cinquième et dernière partie, on étudie la continuité de l'application L sur l'espace des fonctions continûment dérivables de $[\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$, que l'on munit de deux normes différentes.

Ce sujet clair et bien guidé est de difficulté croissante, progressant de calculs simples dans la première partie à des questions techniques nécessitant une rédaction soignée. Comme il aborde en outre un large spectre du programme d'analyse, c'est une bonne occasion de réviser tout en s'entraînant aux écrits.

Indications

Partie I

I.3.2 Montrer que la courbe représentative de f est un arc du cercle de centre $(0,0)$ et rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$. Se rappeler que la longueur d'un arc d'angle θ d'un cercle de rayon R est donnée par θR.

I.4 [HP] Intégrer par parties en intégrant $t \mapsto 1$ et en dérivant $t \mapsto \sqrt{1+4t^2}$. Une primitive de $t \longmapsto 1/\sqrt{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$ est notée Argsh (cette fonction est hors-programme à compter de la rentrée 2014 : c'est la réciproque de la fonction sh).

Partie II

II.1.2 Penser au changement de variable $u = 1/t$.

II.2.2 Développer en série entière $t \mapsto \sqrt{1+t^4}$ grâce à la question II.2.1.

II.2.3 Pour la monotonie de la suite, étudier le rapport a_{n+1}/a_n. En ce qui concerne son comportement asymptotique, utiliser la formule de Stirling.

II.2.4 Combiner les questions II.1.1 et II.2.2. Justifier ensuite l'échange du signe intégral et de la somme en prouvant que la série de fonctions en question converge normalement.

II.2.5 Utiliser le théorème spécial des séries alternées pour obtenir une majoration de l'erreur.

Partie III

III.2.1 Observer que $\sqrt{1+n^2t^{2n-2}} - nt^{n-1} = \sqrt{1+n^2t^{2n-2}} - \sqrt{n^2t^{2n-2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [\,0\,;1\,]$.

III.2.2 Remarquer que, pour tout $u > 0$, $\sqrt{1+u} < 1 + \sqrt{u}$. Pour conserver cette majoration stricte en intégrant cette inégalité, utiliser un résultat classique sur les intégrales de fonctions continues positives.

III.2.3 Utiliser le théorème de convergence dominée.

III.3 Procéder de façon analogue à la question III.2.2. Remarquer de plus que f' est positive.

Partie IV

IV.1.1 Montrer que la fonction $t \mapsto \sin(t)/t$ se prolonge en une fonction continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$.

IV.1.2 Intégrer par parties en intégrant $t \mapsto \sin(t)$ et en dérivant $t \mapsto 1/t$. Montrer ensuite que

$$x \mapsto \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

IV.1.3 Procéder de façon analogue à la question IV.1.2 en intégrant par parties.

IV.1.4 Utiliser la formule de trigonométrie $2\sin^2(t) = 1 - \cos(2t)$. Remarquer que $|\sin(t)| \geqslant \sin^2(t)$.

IV.2.1 Effectuer le changement de variable $u = 1/t$ dans l'intégrale définissant $f(x)$.

IV.2.3 Réaliser le changement de variable $u = 1/t$.

IV.3 Utiliser la minoration $\sqrt{1+u} \geqslant \sqrt{u}$ valable pour tout réel $u \geqslant 0$.

Partie V

V.1.2 Utiliser le théorème fondamental de l'analyse.

V.1.3 Raisonner par l'absurde et exhiber une suite de fonctions bien choisie pour aboutir à une contradiction.

V.2.1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, majorer $f_n(t)$ par une quantité indépendante de $t \in [\,0\,;1\,]$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

V.2.2 Utiliser les minorations $\sqrt{1+u} \geqslant \sqrt{u}$ et $|\cos(t)| \geqslant \cos^2(t)$ valables pour tous réels $u \geqslant 0$ et t.

V.2.3 [HP] Dans cette question et la suivante, la continuité des applications d'un espace vectoriel de dimension infinie dans un autre ne sont plus au programme. Cependant, les définitions sont identiques au cas de la dimension finie.

Raisonner par l'absurde et utiliser la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

V.2.4 Montrer que l'application L est continue en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité.

I. Quelques exemples de calculs de longueurs

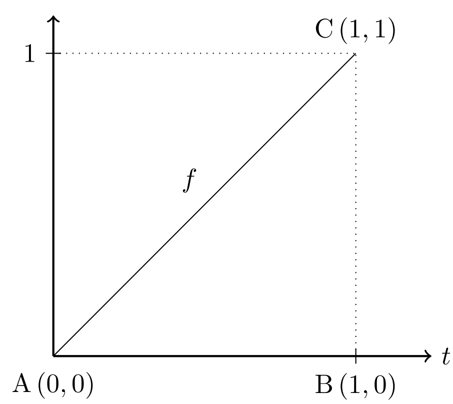
I.1 La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[\,0\,;1\,]$ car c'est une fonction polynomiale et sa dérivée est donnée par

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f'(t) = 1$$

La longueur de la courbe représentative de f est donc

$$\mathrm{L}(f) = \int_0^1 \sqrt{1+1^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}$$

Définissons les points $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(1,0)$ et $\mathrm{C}(1,1)$ du plan $\mathbb{R}^2$. Le calcul précédent redonne bien la longueur du segment $[\,\mathrm{A}\,;\mathrm{C}\,]$ obtenue en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B.



En conclusion, $\boxed{\mathrm{L}(f) = \sqrt{2}}$

I.2 La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[\,0\,;1\,]$ d'après le cours sur les fonctions usuelles et sa dérivée est donnée par

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f'(t) = \mathrm{sh}\,(t)$$

Rappelons que pour tout réel t on a $\mathrm{ch}^{\,2}(t) - \mathrm{sh}^{\,2}(t) = 1$ et que la fonction ch est positive sur $\mathbb{R}$ de sorte que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \sqrt{1+\mathrm{sh}^{\,2}(t)} = |\,\mathrm{ch}\,(t)| = \mathrm{ch}\,(t)$$

Par conséquent, la longueur de la courbe représentative de f est

$$\mathrm{L}(f) = \int_0^1 \sqrt{1+\mathrm{sh}^{\,2}(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{ch}\,(t)\,\mathrm{d}t = [\mathrm{sh}\,(t)]_0^1 = \mathrm{sh}\,(1)$$

d'où $\boxed{\mathrm{L}(f) = \mathrm{sh}\,(1)}$

CCP Maths 2 PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (Professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (ENS Cachan).

Ce sujet est composé d'un unique problème, qui se propose d'étudier une famille de polynômes ainsi que leurs racines. Il est divisé en trois parties, construites dans le prolongement les unes des autres.

- Dans une première partie, ces polynômes sont introduits en tant que vecteurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Elle permet également de démontrer quelques propriétés bien utiles dans la suite du problème, entre autres l'orthogonalité de ces polynômes pour un produit scalaire défini dans cette partie.
- Dans une deuxième partie, on montre une relation de récurrence entre ces polynômes, qui permet de conclure qu'ils sont scindés à racines simples.
- Enfin, une troisième partie définit une suite de matrices avec les coefficients apparaissant dans la relation de récurrence de la partie 2, et l'on montre que leurs polynômes caractéristiques sont égaux aux polynômes considérés jusqu'ici. Une étude approfondie des valeurs propres de ces matrices permet alors d'aboutir à un résultat final sur l'emplacement des racines de ces polynômes.

Ce sujet alterne entre des questions triviales et d'autres demandant un peu plus de réflexion. C'est un bon sujet de révision sur les polynômes et la diagonalisation, avec quelques points de vue originaux, comme l'expression des valeurs propres dans la troisième partie.

Indications

Partie I

I.2.1 [HP] Remarquer que $\mathrm{A}'(\mathrm{X}) = \mathrm{B}(\mathrm{X})$, puis $\mathrm{V}'(\mathrm{X}) = \mathrm{U}(\mathrm{X})$. Un endomorphisme est dit auto-adjoint s'il est symétrique.

I.2.3 Raisonner par récurrence sur $k \leqslant n$ en remarquant que Φ_k est la restriction de Φ_{k+1} à $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$.

I.2.4 Utiliser le caractère symétrique de Φ_n démontré à la question I.2.1 , puis exploiter le fait que P_i et P_k sont des vecteurs propres.

I.2.5 Expliciter la matrice M_3 et chercher ses vecteurs propres.

Partie II

II.1 Considérer les degrés et coefficients dominants des différents polynômes.

II.2 Exploiter les questions I.1.2 et I.2.4 .

II.3 Montrer que S_n et P_{n-2} appartiennent tous deux à $\mathbb{R}_{n-2}[\mathrm{X}]$ et à l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-3}[\mathrm{X}]$: ils sont donc colinéaires. Pour obtenir l'inégalité $\mu_n > 0$, prendre le produit scalaire de l'égalité donnée avec P_{n-2} et utiliser les questions I.1.2 et I.2.4 .

II.4 Utiliser tout d'abord le fait que P_k et P_0 sont orthogonaux, puis montrer par l'absurde que P_k serait de signe constant, puis nul sur l'intervalle $]-1\,;1\,[$.

II.5 Si P_n possède moins de n racines dans $]-1\,;1\,[$, alors Q est de degré au plus $n-1$. Conclure comme à la question précédente.

Partie III

III.1.2 Développer le déterminant $\mathrm{Q}_n(\mathrm{X})$ par rapport à la dernière ligne pour faire apparaître $\mathrm{Q}_{n-1}(\mathrm{X})$, puis développer le déterminant obtenu à nouveau par rapport à la dernière colonne.

III.1.3 Remarquer que les polynômes P_k et Q_k coïncident, puis que Q_n est égal au polynôme caractéristique de M_n.

III.2.1 Exprimer x dans la famille $(e_1, \ldots, e_i)$ puis calculer le produit scalaire $\langle u(x)|x\rangle$ en exploitant les propriétés de cette famille (ce sont des vecteurs propres et ils sont normés). Majorer ensuite la valeur obtenue en utilisant l'inégalité sur les α_k et montrer que la borne obtenue est réalisée pour un certain vecteur bien choisi de la sphère unité de F_i.

III.2.2 Raisonner comme à la question précédente.

III.3 Utiliser la formule de Grassmann. Après avoir trouvé l'inégalité $\langle u(x)|x\rangle \geqslant \alpha_i$, passer au maximum sur les vecteurs x puis à la borne inférieure sur les espaces F. Considérer ensuite le cas $\mathrm{F} = \mathrm{F}_i$.

III.4.1 Noter que si $x = (y, 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, alors $\langle u(x), x\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle v(y), y\rangle_{\mathbb{R}^{n-1}}$ où v est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{n-1}$ associé à la matrice M_{n-1}.

III.4.2 Enchaîner les inégalités données par la question précédente.

III.4.3 Exploiter les questions III.1.3 et III.4.2 avec les notations des questions III.2 et III.4.1 .

I. Étude d'un endomorphisme

I.1.1 Soient $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. Le polynôme P′ est de degré au plus $n-1$ et le polynôme P″ au plus $n-2$. Par suite, comme le polynôme A est de degré 2 et le polynôme B de degré 1, le polynôme $\Phi(P) = AP'' + BP'$ est de degré au plus n. En outre, il est à coefficients réels, donc il appartient bien à $\mathbb{R}_n[X]$.

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\Phi(P+\lambda Q) &= A(P+\lambda Q)'' + B(P+\lambda Q)' \\ &= AP'' + \lambda AQ'' + BP' + \lambda BQ' \\ \Phi(P+\lambda Q) &= \Phi(P) + \lambda\Phi(Q)\end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation des fonctions polynomiales. Ainsi, Φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, si bien que

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

> Remarquons l'égalité $B = A'$, ce qui permet d'écrire que $\Phi(P) = (AP')'$.

I.1.2 Soient P, Q et R trois polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord,
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)\,dt = \langle Q, P\rangle$$
ce qui signifie que l'application donnée est symétrique.
- Ensuite,
$$\langle P+\lambda Q, R\rangle = \int_{-1}^{1} (P(t)+\lambda Q(t))R(t)\,dt = \int_{-1}^{1} P(t)R(t)\,dt + \lambda\int_{-1}^{1} Q(t)R(t)\,dt$$
par linéarité de l'intégrale, d'où
$$\langle P+\lambda Q, R\rangle = \langle P, R\rangle + \lambda\langle Q, R\rangle$$
L'application est donc linéaire à gauche, c'est-à-dire bilinéaire par symétrie.
- De plus, $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt \geqslant 0$ donc l'application est positive.
- Enfin, si $\langle P, P\rangle = 0$, alors $P^2(t) = 0$ pour tout $t \in [\,-1\,;1\,]$ puisque P^2 est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle. On en déduit que P^2 admet une infinité de racines, puis que c'est le polynôme nul. Ainsi, $P = 0$.

Finalement, l'application donnée est bilinéaire, symétrique et définie positive d'où

$$\boxed{\text{L'application } (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

En outre, $\boxed{\langle XP, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} tP(t)Q(t)\,dt = \int_{-1}^{1} P(t)tQ(t)\,dt = \langle P, XQ\rangle}$

> Plus généralement, on peut montrer que $\langle P, QR\rangle = \langle PR, Q\rangle$ pour tous polynômes P, Q et R.

I.2.1 Remarquons comme à la question I.1.1 que $\mathrm{A}'(\mathrm{X}) = \mathrm{B}(\mathrm{X})$. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On a alors

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(\mathrm{P}), \mathrm{Q}\rangle - \langle \mathrm{P}, \Phi(\mathrm{Q})\rangle &= \int_{-1}^{1} \big[\Phi(\mathrm{P})(t)\mathrm{Q}(t) - \mathrm{P}(t)\Phi(\mathrm{Q})(t)\big]\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} \big[\mathrm{A}(t)\mathrm{P}''(t)\mathrm{Q}(t) + \mathrm{A}'(t)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}(t) \\
&\qquad -\mathrm{P}(t)\mathrm{A}(t)\mathrm{Q}''(t) - \mathrm{P}(t)\mathrm{A}'(t)\mathrm{Q}'(t)\big]\, \mathrm{d}t \\
\langle \Phi(\mathrm{P}), \mathrm{Q}\rangle - \langle \mathrm{P}, \Phi(\mathrm{Q})\rangle &= \int_{-1}^{1} \big[\mathrm{A}(t)(\mathrm{P}''(t)\mathrm{Q}(t) - \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}''(t)) \\
&\qquad +\mathrm{A}'(t)(\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}(t) - \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}'(t))]\, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Par suite, $$\langle \Phi(\mathrm{P}), \mathrm{Q}\rangle - \langle \mathrm{P}, \Phi(\mathrm{Q})\rangle = \int_{-1}^{1} (\mathrm{A}(t)\mathrm{U}(t) + \mathrm{A}'(t)\mathrm{V}(t))\, \mathrm{d}t$$

en posant $$\boxed{\mathrm{U} = \mathrm{P}''\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{Q}'' \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V} = \mathrm{P}'\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{Q}'}$$

Remarquons désormais que $\mathrm{U} = \mathrm{V}'$. En effet,

$$\mathrm{V}' = (\mathrm{P}'\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{Q}')' = \mathrm{P}''\mathrm{Q} + \mathrm{P}'\mathrm{Q}' - \mathrm{P}'\mathrm{Q}' - \mathrm{P}\mathrm{Q}'' = \mathrm{U}$$

d'où $$\langle \Phi(\mathrm{P}), \mathrm{Q}\rangle - \langle \mathrm{P}, \Phi(\mathrm{Q})\rangle = \int_{-1}^{1} \big[\mathrm{A}(t)\mathrm{V}'(t) + \mathrm{A}'(t)\mathrm{V}(t)\big]\ \mathrm{d}t = [\mathrm{A}(t)\mathrm{V}(t)]_{-1}^{1} = 0$$

puisque $\mathrm{A}(-1) = \mathrm{A}(1) = 0$. On en déduit que l'endomorphisme Φ est symétrique. Comme Φ_n est la restriction de Φ à un sous-espace stable par Φ, on en déduit que

$$\boxed{\text{Pour tout } n, \text{ l'endomorphisme } \Phi_n \text{ est symétrique.}}$$

I.2.2 On a $\Phi_n(1) = 0$ et $\Phi_n(\mathrm{X}) = \mathrm{B} = 2\mathrm{X}$. Soit $k \in \{2, \ldots, n\}$. On a

$$\begin{aligned}
\Phi_n(\mathrm{X}^k) &= \mathrm{A}k(k-1)\mathrm{X}^{k-2} + \mathrm{B}k\mathrm{X}^{k-1} \\
&= k(k-1)\mathrm{X}^k - k(k-1)\mathrm{X}^{k-2} + 2k\mathrm{X}^k \\
\Phi_n(\mathrm{X}^k) &= k(k+1)\mathrm{X}^k - k(k-1)\mathrm{X}^{k-2}
\end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de Φ_n dans cette base s'écrit de la façon suivante :

$$\boxed{\begin{pmatrix}
0 & 0 & -2\cdot 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 2 & 0 & -3\cdot 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 2\cdot 3 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 3\cdot 4 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & (n-2)(n-1) & 0 & -n(n-1) \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & (n-1)n & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & n(n+1)
\end{pmatrix}}$$

Cette matrice étant triangulaire supérieure, on peut directement lire ses valeurs propres sur sa diagonale :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\Phi_n) = \{k(k+1) \mid k \in \{0, \ldots, n\}\}}$$

Pré-sujet de probabilités des Mines 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Walter Appel (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Sophie Rainero (Professeur en CPGE) et Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université).

Voici le sujet que le concours des Mines propose comme « sujet 0 », et qui donne une idée du ton des futures épreuves traitant de probabilités.

Le problème porte sur la modélisation d'une queue de clients, lorsque le nombre de clients arrivant à chaque instant n suit une loi fixée. À l'aide de la *fonction caractéristique*, on établit notamment une loi « limite » pour le nombre de clients restant à servir.

- La première partie fait démontrer quelques généralités sur la fonction caractéristique d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Les propriétés prouvées sont des grands classiques de la théorie des probabilités qui, si elles n'apparaissent pas dans le programme, seront très probablement réintroduites dans de nombreuses épreuves.

  On montre notamment que la fonction caractéristique caractérise la loi : deux variables aléatoires (à valeurs dans $\mathbb{N}$, ici) ont même loi si et seulement si elles ont même fonction caractéristique.
- Dans la deuxième partie, on montre quelques propriétés utiles sur les variables aléatoires A_n (nombre de clients arrivant entre l'instant n et l'instant $n+1$), censées toutes suivre la même loi qu'une variable A, et sur les variables aléatoires X_n (nombre de clients dans la queue).
- La troisième partie permet de montrer que, sous certaines hypothèses supplémentaires, la suite des fonctions caractéristiques des X_n converge simplement vers une fonction θ donnée.
- Enfin, dans la dernière partie, on montre que les hypothèses de la partie précédentes sont bien vérifiées lorsque la loi commune aux A_n est une certaine loi géométrique, et on identifie la « loi limite » de la suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'épreuve est d'une longueur très raisonnable et de nombreuses questions sont des applications assez directes du cours de probabilités du nouveau programme ; les principales difficultés sont finalement plutôt du domaine de l'analyse, les techniques de sommation et de majoration devant être correctement maîtrisées.

Indications

Partie 1

1 Écrire $\phi_{\mathrm{X}}(t)$ sous la forme de la somme d'une série en utilisant la formule de transfert. Invoquer ensuite le théorème de continuité pour les séries de fonctions.

2 Montrer que, pour tout entier k, $\mathrm{I}_k = \mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$ et en déduire que X et Y ont la même loi.

3 Utiliser le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

4 L'énoncé présente une légère coquille, la variable intéressante est $\mathrm{Z} = \mathrm{Y} - 1$, et non $\mathrm{Y} + 1$.

5 Procéder par disjonction des cas, selon la valeur de X_n.

Partie 2

6 Si $\mathrm{M} > 0$, choisir un réel $\mathrm{N} \geqslant \mathrm{M}$, et montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n > \mathrm{M}) \geqslant \mathrm{P}(\mathrm{A} > \mathrm{N}) > 0$.

7 Procéder par disjonction des cas, selon la valeur de X_n.

8 Remarquer que X_n est une fonction de $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n)$ pour $n \geqslant 1$.

Partie 3

10 Partir de la décomposition $1 = \mathbb{1}_{(\mathrm{X}_n > 0)} + \mathbb{1}_{(\mathrm{X}_n = 0)}$, multiplier par $\mathrm{e}^{it\mathrm{X}_{n+1}}$ puis passer aux espérances.

13 Forcer l'apparition de $\phi_{\mathrm{X}_n}(t) - \theta(t)$; le préfacteur est, en module, égal à $\phi_{\mathrm{A}}(t)$ que l'on pourra donc identifier à β_t. Après application de l'inégalité triangulaire, il reste un terme qui doit tendre vers 0 quand n tend vers l'infini, et qui devient donc « epsilonesque » pour n suffisamment grand.

14 La propriété est évidente lorsque $t \in 2\pi\mathbb{Z}$. Dans le cas contraire, montrer que si $\beta \in \,]\,0\,;1\,[$, alors toute suite positive vérifiant « pour tout ε, il existe un entier à partir duquel $v_{n+1} \leqslant \beta v_n + \varepsilon$ » converge vers 0.

Partie 4

15 Exprimer ϕ_{A} sous la forme d'une série trigonométrique puis utiliser la question 2.

16 Ne pas oublier de montrer que A est à valeurs dans $\mathbb{N}$, que $\mathrm{P}(\mathrm{A} \geqslant n) > 0$ pour tout entier n, que $\left|\phi_{\mathrm{A}}(t)\right| < 1$ pour tout $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et que $\mathrm{E}[\mathrm{A}] = \rho \in \,]\,0\,;1\,[$.

17 L'énoncé ne le précise pas, mais la variable Y est une variable dont la fonction caractéristique est θ.

1. Fonction caractéristique

1 La formule de transfert permet d'expliciter l'espérance de e^{itX}, qui existe bien puisque e^{itX} est bornée en module par 1 :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \phi_X(t) = E[\mathrm{e}^{itX}] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \,\mathrm{e}^{int}$$

où l'on a noté $p_n = P(X = n)$ pour tout entier n. Définissons la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n : t \mapsto p_n \,\mathrm{e}^{int}$. Chaque fonction u_n est continue, bornée et $\|u_n\|_\infty = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge donc normalement et, en particulier, elle converge uniformément. Un théorème du cours assure alors que sa somme est continue. En conclusion,

$$\boxed{\phi_X \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

> Lorsqu'une série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement et a pour somme une fonction F, alors certaines propriétés sont conservées par passage à la limite simple, comme la périodicité, la croissance, la convexité (en filière MP)... et d'une manière générale toutes les propriétés qui ne demandent qu'à comparer des valeurs de F en un nombre fini de points (propriétés *ponctuelles*).
> En revanche, la continuité des u_n et la convergence simple n'assurent pas en général la continuité de F : on doit montrer que la série converge uniformément (par exemple parce qu'elle converge normalement), au moins localement, c'est-à-dire sur tout segment de l'intervalle de définition.

Enfin, chaque u_n est une fonction 2π-périodique ; notamment, puisque toutes les séries convergent, on a pour tout réel t :

$$\phi_X(t+2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t+2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = \phi_X(t)$$

donc

$$\boxed{\phi_X \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$$

> Puisque ϕ_X est continue et 2π-périodique, on en déduit qu'elle est bornée. Cependant, il est aisé de montrer ce résultat directement : grâce à la convergence absolue de la série de fonctions, on a
> $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \left|\phi_X(t)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \left|p_n \,\mathrm{e}^{int}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$$
> Ce résultat reste d'ailleurs vrai lorsque X est une variable aléatoire quelconque (pas forcément à valeurs dans $\mathbb{N}$).

2 Soit k un entier naturel. En écrivant

$$\forall t \in [\,0\,;2\pi\,] \qquad \phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\,\mathrm{e}^{int}$$

on obtient

$$I_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{P(X=n)\,\mathrm{e}^{i(n-k)t}}_{=v_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

Puisque $\|v_n\|_\infty = \mathrm{P}(\mathrm{X} = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série numérique $\sum \|v_n\|_\infty$ converge, c'est-à-dire que la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement, et donc uniformément. Ainsi, on peut intégrer terme à terme dans l'égalité précédente :

$$\mathrm{I}_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} = n) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n-k)t} \, \mathrm{d}t$$

Or, un résultat extrêmement classique est le suivant :

$$\forall\, p, q \in \mathbb{Z} \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(p-q)t} \, \mathrm{d}t = \delta_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, si $p = q$, on intègre la fonction constante égale à 1, et si $p \neq q$, on sait calculer une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(p-q)t}$, qui est $t \mapsto \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(p-q)t}/\mathrm{i}(p-q)$ et est donc 2π-périodique. En conclusion, on a donc montré que

$$\mathrm{I}_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} = n) \; \delta_{n,k} = \mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$$

Ceci étant valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a donc déduit la loi de X de la connaissance de sa fonction caractéristique. Notamment, si X et Y ont même fonction caractéristique, alors pour tout entier naturel k, on a

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y} = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\mathrm{Y}}(t) \, \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}kt} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\mathrm{X}}(t) \, \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}kt} \, \mathrm{d}t = \mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$$

Deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant même fonction caractéristique ont même loi.

> Le but de cette question est de montrer que *la fonction caractéristique caractérise la loi*, c'est-à-dire que la connaissance de ϕ_{X} suffit (du moins du point de vue théorique) à déterminer entièrement la loi de X. Notamment, deux variables aléatoires ayant même fonction caractéristique ont même loi. La démonstration générale de cette propriété est assez délicate ; s'agissant de lois discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est beaucoup plus facile.

3 On suppose que « $\mathrm{E}[\mathrm{X}] < +\infty$ », c'est-à-dire que X admet une espérance. On rappelle que l'on a noté, dans la question 1, $u_n : t \mapsto p_n \, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}nt}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; ce sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. On peut alors montrer que ϕ_{X} est de classe $\mathscr{C}^1$ en prouvant la convergence uniforme de la série des dérivées $\sum u'_n$. Puisque

$$u'_n : t \longmapsto \mathrm{i}n \, p_n \, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}nt}$$

on a donc $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \|u'_n\|_\infty = n \, p_n$

Or, dire que X admet une espérance, c'est précisément dire que la série $\sum n \, p_n$ converge. Ainsi, $\sum u'_n$ converge normalement, et donc uniformément. Le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions assure que

$$\boxed{\phi_{\mathrm{X}} \text{ est de classe } \mathscr{C}^1}$$

et que, de plus $\qquad \phi'_{\mathrm{X}} : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{i}n \, p_n \, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}nt}$

Notamment, $\qquad \boxed{\phi'_{\mathrm{X}}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{i}n \, p_n = \mathrm{i} \, \mathrm{E}[\mathrm{X}]}$

Mines Maths 1 PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Antoine Sihrener (Professeur en CPGE) et Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet d'algèbre linéaire est consacré à la décomposition des endomorphismes en sommes de projecteurs. Il est constitué de trois parties pouvant être traitées indépendamment.

- Dans les deux premières parties, on retrouve des résultats du cours de première année sur la trace des matrices carrées et sur les projecteurs.
- Dans la troisième et dernière partie, on se place dans un espace euclidien et l'on retrouve d'abord quelques résultats classiques sur les endomorphismes symétriques et les projecteurs orthogonaux. On s'intéresse ensuite aux endomorphismes symétriques positifs de trace entière et supérieure à leur rang : en partant d'une base orthonormée de vecteurs propres, on démontre que ce sont les sommes finies de projecteurs orthogonaux de rang 1.

Ce sujet est d'une longueur tout à fait raisonnable et ne comporte pas de difficultés notables. En particulier, on retrouve beaucoup de questions de cours et d'applications directes de celui-ci. Cependant, l'auteur du sujet a adopté des notations peu fréquentes ($\mathrm{N}(f)$ et $\mathrm{R}(f)$ au lieu de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ par exemple), certaines pouvant même être à l'origine de confusions (les matrices sont notées avec des doubles barres, comme les ensembles de nombres), ce qui a certainement perturbé nombre de candidats. De plus, certaines questions comportent quelques imprécisions, quand elles ne sont pas carrément mal posées, comme la question 12 (son résultat n'est pas assez fort pour la suite du problème).

Ainsi, un candidat maîtrisant le programme pouvait traiter le sujet dans son intégralité, sous réserve que les insuffisances de l'énoncé ne lui fassent pas perdre trop de temps.

Indications

Partie 1

2 Utiliser la formule de changement de base et le résultat de la question précédente.

Partie 2

4 Déterminer la matrice de P respectivement à une base de X adaptée à la somme directe $\mathrm{R(P)} \oplus \mathrm{N(P)}$.

6 Pour prouver que $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}) \in \mathbb{N}$, penser à la question 4. Utiliser ensuite la question 5 pour établir l'inégalité $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}) \geqslant \mathrm{rg}\,(\mathrm{S})$.

Partie 3

7 Décomposer $x \in \mathrm{X}$ dans une base de vecteurs propres de T.

8 On pourra noter que la décomposition d'un vecteur de X associée à la somme directe $\mathrm{X} = \mathrm{R(P)} \oplus \mathrm{N(P)}$ s'écrit $x = \mathrm{P}(x) + x - \mathrm{P}(x)$.

9 Utiliser le résultat précédent et la relation $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$.

11 Penser au résultat de la question 9.

12 Il suffit de trouver i tel que $\lambda_i > 1$, puis de s'inspirer de ce qui a été fait lors des questions précédentes. Noter que l'on montre au passage que $\mathrm{R}(\mathrm{T} - \mathrm{Q}_i) = \mathrm{Y}$.

13 Raisonner par récurrence sur $k = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{T}) - \mathrm{rg}\,(\mathrm{T})$, en utilisant la question 12 pour établir l'hérédité. Attention, pour la suite du problème, il ne faut pas seulement montrer que Y est stable par S mais que $\mathrm{R(S)} = \mathrm{Y}$.

15 Il faut bien entendu utiliser une base orthonormée de vecteurs propres de U.

16 Si 1 n'est pas valeur propre, montrer à l'aide de $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{S})$ qu'il existe $(i, j) \in [\![1\,;\, r]\!]^2$ tel que $\mu_i < 1 < \mu_j$, puis suivre l'indication de l'énoncé.

17 Penser à utiliser la question 8.

18 Pour $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Y}$ et $z \in \mathrm{Z}$, exprimer $((\mathrm{S} - \mathrm{P}_w)(x) \mid x)$ en fonction de ξ et de y, puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Noter au passage que $\mathrm{N(S)} = \mathrm{Z}$.

19 Pour montrer l'inclusion $\mathrm{N}(\mathrm{S} - \mathrm{P}_w) \subset \mathrm{N(S)} + \mathrm{Vect}\,\big(\mathrm{U}^{-1} w\big)$, prendre un vecteur x appartenant à $\mathrm{N}(\mathrm{S} - \mathrm{P}_w)$ et noter que la relation $(\mathrm{S} - \mathrm{P}_w)(x) = 0$ peut se « factoriser » par S.

20 Effectuer une récurrence sur $k = \mathrm{rg}\,(\mathrm{S}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{S})$.

21 Combiner les résultats des questions 6, 13 et 20.

1. Trace

$\boxed{1}$ Les coefficients des matrices $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ et $\mathbb{D} = \mathbb{B}\mathbb{A}$ sont définis respectivement par

$$\forall\,(i,j) \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]^2 \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad \text{et} \quad d_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} b_{i\ell}a_{\ell j}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Tr}\,(\mathbb{C}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = \mathrm{Tr}\,(\mathbb{D})$$

soit
$$\boxed{\mathrm{Tr}\,(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \mathrm{Tr}\,(\mathbb{B}\mathbb{A})}$$

$\boxed{2}$ Considérons deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de l'espace X et notons $\mathbb{P}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Les matrices associées à T dans ces bases vérifient $\mathbb{T}_{\mathscr{B}'} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{T}_{\mathscr{B}}\mathbb{P}$, d'où

$$\mathrm{Tr}\,(\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}) = \mathrm{Tr}\,(\mathbb{P}^{-1}\mathbb{T}_{\mathscr{B}}\mathbb{P}) = \mathrm{Tr}\,(\mathbb{P}\mathbb{P}^{-1}\mathbb{T}_{\mathscr{B}}) = \mathrm{Tr}\,(\mathbb{T}_{\mathscr{B}})$$

d'après le résultat de la question précédente. Ainsi,

$$\boxed{\text{La trace de la matrice } \mathbb{T}_{\mathscr{B}} \text{ est indépendante de la base } \mathscr{B} \text{ choisie.}}$$

2. Projecteurs

$\boxed{3}$ Soit P un projecteur de X. Puisque P est un endomorphisme de l'espace X de dimension finie, on déduit du théorème du rang que $\dim(\mathrm{X}) = \dim \mathrm{R}(\mathrm{P}) + \dim \mathrm{N}(\mathrm{P})$.

Considérons maintenant un vecteur $x \in \mathrm{R}(\mathrm{P}) \cap \mathrm{N}(\mathrm{P})$.

- Tout d'abord, $x \in \mathrm{R}(\mathrm{P})$ si bien qu'il existe $y \in \mathrm{X}$ tel que $x = \mathrm{P}(y)$.
- De plus, $x \in \mathrm{N}(\mathrm{P})$ donc $\mathrm{P}(x) = 0$ soit $\mathrm{P}^2(y) = 0$.

Comme P est un projecteur, $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$ donc $x = \mathrm{P}(y) = 0$; ainsi, $\mathrm{R}(\mathrm{P}) \cap \mathrm{N}(\mathrm{P}) = \{0\}$. Ceci montre que

$$\boxed{\mathrm{X} = \mathrm{R}(\mathrm{P}) \oplus \mathrm{N}(\mathrm{P})}$$

> Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de X, la relation $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{X}$ est équivalente à $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{X}$ et $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$. Mais, en dimension finie, on peut remplacer l'une de ces deux conditions par $\dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{X})$ ... et c'est souvent $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{X}$ que l'on sacrifie.

$\boxed{4}$ Soient $\mathscr{B}_1$ une base de R(P) et $\mathscr{B}_2$ une base de N(P) : comme $\mathrm{X} = \mathrm{R}(\mathrm{P}) \oplus \mathrm{N}(\mathrm{P})$, la famille $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ est une base de X adaptée à cette somme directe.

- Pour tout $x \in \mathrm{R}(\mathrm{P})$, il existe $y \in \mathrm{X}$ tel que $x = \mathrm{P}(y)$, ce qui entraîne que

  $$\mathrm{P}(x) = \mathrm{P}^2(y) = \mathrm{P}(y) = x$$

  puisque P est un projecteur. Autrement dit, $\mathrm{P}_{|\mathrm{R}(\mathrm{P})} = \mathrm{Id}_{\,\mathrm{R}(\mathrm{P})}$.
- Par ailleurs, la définition de N(P) implique que $\mathrm{P}_{|\mathrm{N}(\mathrm{P})} = 0$.

De ce fait, si l'on note $r = \dim \mathrm{R}(\mathrm{P})$ le rang de P, on a

$$\mathbb{P}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

d'où $$\boxed{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{P}) = r = \mathrm{rg}\,(\mathrm{P})} \qquad \text{(cf. question 2)}$$

5 D'après la formule de Grassmann, on sait que

$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})$$

Comme $\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}) \geqslant 0$, on en déduit que

$$\boxed{\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) \leqslant \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G})}$$

> On peut aussi retrouver ce résultat en raisonnant de la manière suivante : soient $\mathscr{B}_\mathrm{F}$ et $\mathscr{B}_\mathrm{G}$ des bases de F et de G respectivement. La famille $\mathscr{G} = (\mathscr{B}_\mathrm{F}, \mathscr{B}_\mathrm{G})$ est alors une famille génératrice de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ de cardinal $\dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G})$, ce qui prouve que $\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) \leqslant \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G})$.

6 Soient $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_m$ des projecteurs de X tels que $\mathrm{S} = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathrm{P}_i$. Grâce à la linéarité de la trace et au résultat de la question 4, on a

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{P}_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{rg}\,(\mathrm{P}_i) \in \mathbb{N}$$

soit $$\boxed{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}) \in \mathbb{N}}$$

De plus, une récurrence immédiate à partir du résultat de la question 5 montre que

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{rg}\,(\mathrm{P}_i) = \sum_{i=1}^{m} \dim \mathrm{R}(\mathrm{P}_i) \geqslant \dim\left(\sum_{i=1}^{m} \mathrm{R}(\mathrm{P}_i)\right)$$

Or, $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathrm{P}_i(x) \in \sum\limits_{i=1}^{m} \mathrm{R}(\mathrm{P}_i)$ pour tout $x \in \mathrm{X}$. Par conséquent, $\mathrm{R}(\mathrm{S}) \subset \sum\limits_{i=1}^{m} \mathrm{R}(\mathrm{P}_i)$ d'où $\dim\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \mathrm{R}(\mathrm{P}_i)\right) \geqslant \dim \mathrm{R}(\mathrm{S})$. Il en découle que

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{S}) \geqslant \mathrm{rg}\,(\mathrm{S})}$$

Mines Maths 2 PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thierry Limoges (ENS Cachan) ; il a été relu par Florian Metzger (ENS Cachan) et Benjamin Monmege (ENS Cachan).

L'équation de la chaleur $\dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{T}(t,x) - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{T}(t,x) = 0$

se généralise en $$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{T}(t,x) + (\mathrm{A}(\mathrm{T}(t,\cdot))\,(x) = 0$$

où A est une application linéaire sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ et 2π-périodiques. On peut retrouver la première équation à partir de la deuxième en prenant pour A l'opposé du laplacien : $\mathrm{A}(f) = -f^{(2)}$. Ce sujet a pour but d'étudier une solution de l'équation de la chaleur généralisée. Il comporte 20 questions réparties sur 5 parties. Les parties 2 à 5, les plus techniques, utilisent fréquemment des résultats de la partie 1. Dans chacune, les questions sont de longueur et de difficulté inégales.

- La première partie montre des résultats préliminaires sur la convergence de la série de Fourier qui est associée à une fonction 2π-périodique. On y établit certains critères pour qu'une somme de série soit de classe $\mathscr{C}^\infty$. C'est la partie la plus abordable du sujet.
- La deuxième partie calcule une solution de l'équation de la chaleur sous la forme d'une série. Ici f est une fonction continue et 2π-périodique, qui correspond à la température initiale sur une barre circulaire (à $t = 0$). On étudie également des propriétés spectrales de A.
- La troisième partie s'intéresse au cas particulier où l'opérateur A est l'opposé du laplacien, ce qui correspond à l'équation de la chaleur « classique », puis, surtout, au cas où A est une racine de l'opposé du laplacien au sens de la composition des applications linéaires sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$. On montre une formule avec une intégrale pour une solution de l'équation de la chaleur avec f de classe $\mathscr{C}^\infty$.
- La quatrième partie établit des résultats similaires en réduisant les hypothèses sur la fonction f. On la suppose seulement continue et non $\mathscr{C}^\infty$. On étudie enfin des propriétés de convergence de la solution de l'équation de la chaleur.
- La cinquième partie ne comporte qu'une question qui étudie à nouveau une propriété de convergence.

Les outils mobilisés pour ce sujet sont essentiellement les théorèmes sur les séries de fonctions : interversion de limite et d'intégrale, dérivation terme à terme, intégration terme à terme, double limite. Beaucoup de majorations sont nécessaires pour vérifier toutes les hypothèses de ces théorèmes, ce qui est classique dans un problème d'analyse. Ce sujet varie peu les plaisirs, il est utile pour travailler spécifiquement ces techniques mais ne balaye qu'une petite partie du programme. Des points de cours de base sont utilisés avec parcimonie, comme l'intégrabilité sur $[\,0\,;+\infty\,[$ de fonctions exponentielles, des primitives usuelles, la finitude du nombre de racines d'un polynôme, la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre. Le chapitre sur les séries de Fourier n'est plus au programme depuis 2014. Dans la mesure du possible, ce corrigé a été rédigé en utilisant seulement des outils au programme ; cependant, quelques passages nécessitent d'utiliser des théorèmes hors programme, qui sont rappelés dans les indications.

Indications

2 Réaliser une intégration par parties pour exprimer le nombre $c_n(f^{(k)})$ en fonction de $c_n(f^{(k-1)})$ puis utiliser la question 1.

3 Montrer la convergence normale de la série de fonctions. Pour le calcul de $c_n(h)$, utiliser le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

4 Appliquer l'hypothèse pour borner $d_n e_n^{(l)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Utiliser le théorème de dérivation terme à terme pour le cas $\mathscr{C}^k$.

5 [HP] Pour le sens direct, calculer en utilisant la question 2 et la linéarité de c_n. Pour le sens réciproque, calculer $c_n(\mathrm{B}f)$, et écrire les fonctions $f^{(k)}$ et $\mathrm{B}f$ comme sommes de séries. Utiliser le théorème suivant : Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Alors sa série de Fourier $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ converge simplement vers$f$, c'est-à-dire $f = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$.

6, 7 Appliquer les résultats des questions 2 et 4.

8 Appliquer le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

9 Utiliser la formule de la dérivée de $t \longmapsto \mathrm{Q}_t(f)(x)$ prouvée à la question 8.

10 [HP] Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients $c_n(u)$ pour trouver une telle fonction u. Utiliser le théorème donné dans l'indication de la question 5.

11 Appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

12 Trouver l'hypothèse minimale sur α utilisée dans la question 10, puis montrer que si celle-ci n'est pas vérifiée le résultat devient faux.

13 Utiliser la question 4 sur les coefficients $c_n(\mathrm{A}^1(f))$.

14 [HP] Pour A^2, utiliser le théorème donné dans l'indication de la question 5. Pour A^1, utiliser le critère de la question 5, en raisonnant par l'absurde.

15 Le laplacien de f de classe $\mathscr{C}^2$ est $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. L'équation de la chaleur est $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

16 [HP] Utiliser un changement de variables $x = tx'$, puis le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions, ainsi que le théorème donné dans l'indication de la question 5.

17 Utiliser le théorème de Weierstrass trigonométrique rappelé dans l'énoncé et couper la différence entre les deux membres de l'équation en trois morceaux que l'on majorera indépendamment.

18 Appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions à la définition de $\mathrm{Q}_t^1(f)$.

19 Dans la forme intégrale de $\mathrm{Q}_t^1(f)$ obtenue à la question 17, montrer que l'intégrande converge uniformément vers la fonction nulle sur un intervalle ne contenant pas un voisinage de 0. Au voisinage de 0, effectuer le changement de variables $x = tx'$ puis utiliser la continuité de f en y.

20 [HP] Utiliser la formule de Parseval ci-dessous pour les séries de Fourier, puis le théorème de la double limite pour les séries de fonctions.

Cette formule donne une relation entre la norme 2 d'une fonction continue et 2π-périodique et ses coefficients de Fourier $c_n(f)$: pour $f \in \mathscr{C}_\sharp^0$ on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

Pour une famille $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de complexes,

$$\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n \text{ converge} \quad\Longleftrightarrow\quad \text{les séries } \sum d_n \text{ et } \sum d_{-n} \text{ convergent}$$

où les séries de droite sont indexées par $\mathbb{N}$. Dans ce cas, sa somme vaut

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n = d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n + \sum_{n=1}^{+\infty} d_{-n}$$

Pour montrer la convergence de telles séries, il suffit d'étudier d_n pour $|n|$ grand. On définit de même la convergence absolue d'une famille de complexes et la convergence simple, absolue, uniforme et normale (sur un intervalle) d'une famille $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de fonctions de la variable réelle à valeurs complexes.

1. Séries trigonométriques

$\boxed{1}$ Pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
|c_n(f)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|\left|\mathrm{e}^{-in\theta}\right|\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|\,\mathrm{d}\theta \qquad \left(\left|\mathrm{e}^{-in\theta}\right| = 1 \text{ pour } \theta\in\mathbb{R}\right) \\
|c_n(f)| &\leqslant \|f\|
\end{aligned}$$

Cette quantité ne dépend pas de n, ainsi

$$\boxed{\text{La suite } (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \text{ est bornée.}}$$

$\boxed{2}$ Soient $f \in \mathscr{C}_\sharp^\infty$, $k\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{Z}$. Les fonctions $f^{(k+1)}$ et $\theta \longmapsto \mathrm{e}^{-in\theta}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;2\pi\,]$. On peut donc effectuer une intégration par parties pour calculer

$$\begin{aligned}
c_n(f^{(k+1)}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(k+1)}(\theta)\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[f^{(k)}(\theta)\mathrm{e}^{-in\theta}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(k)}(\theta)(-in\mathrm{e}^{-in\theta})\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(f^{(k)}(2\pi) - f^{(k)}(0)\right) + inc_n(f^{(k)}) \\
c_n(f^{(k+1)}) &= inc_n(f^{(k)})
\end{aligned}$$

où $f^{(k)}(2\pi) = f^{(k)}(0)$ car f, donc $f^{(k)}$, sont 2π-périodiques. Par conséquent, la suite $(c_n(f^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison in d'où

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N} \quad c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)}$$

Ainsi $\left|c_n(f^{(k)})\right| = |n|^k\,|c_n(f)|$, donc $|c_n(f)| = \left|c_n(f^{(k)})\right| / |n|^k$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$. Comme la fonction $f^{(k)}$ est continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, elle est dans $\mathscr{C}^0_\sharp$. D'après la question 1, la suite $(c_n(f^{(k)}))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée. Il existe donc $\mathrm{C}_k > 0$ tel que $\left|c_n(f^{(k)})\right| \leqslant \mathrm{C}_k$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}^* \qquad |c_n(f)| \leqslant \frac{\mathrm{C}_k}{|n|^k}}$$

> La question 1 fournit une borne explicite pour C_k. Pour que C_k soit strictement positive, on peut prendre $\mathrm{C}_k = 1 + \|f^{(k)}\|$.

3 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $|d_n e_n(x)| = |d_n|\left|\mathrm{e}^{\,inx}\right| = |d_n|$ qui est le terme d'une série indexée par $\mathbb{Z}$ convergente, par hypothèse de l'absolue convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} d_n$, d'où les séries de fonctions $\sum d_n e_n$ et $\sum d_{-n} e_{-n}$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}.}$$

D'après ce qui précède, la série de fonctions $\sum d_n e_n$ est normalement convergente, donc uniformément convergente. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \longmapsto d_n e_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. En conséquence, les sommes

$$h^+ : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} d_n e_n(x) \qquad \text{et} \qquad h^- : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} d_{-n} e_{-n}(x)$$

sont continues sur $\mathbb{R}$. Puisque $d_0 e_0$ l'est également, la somme $h = d_0 e_0 + h^+ + h^-$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} d_n e_n$ est également continue.

Montrons la 2π-périodicité de h en revenant à la définition : pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e_n(x + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e_n(x) = h(x)$$

car les fonctions e_n sont 2π-périodiques. Finalement,

$$\boxed{\text{La somme } h \text{ de la série de fonctions } \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e_n \text{ appartient à } \mathscr{C}^0_\sharp.}$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculons maintenant $c_n(h)$. Par définition,

$$\begin{aligned}
c_n(h) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_m \mathrm{e}^{\,im\theta}\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
c_n(h) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} d_m \mathrm{e}^{\,im\theta}\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} d_{-m} \mathrm{e}^{-im\theta}\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

Centrale Maths 1 PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Yvon Vignaud (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Benoît Landelle (Professeur en CPGE) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Ce sujet en trois parties étudie plusieurs aspects d'une famille de polynômes (V_n), appelés polynômes de Tchebychev de deuxième espèce. Cependant, les polynômes ne sont jamais nommés par leur nom officiel et leur introduction se fait par des méthodes très loin des définitions usuelles, pour ne pas dire complètement tordues.

- La première partie commence par établir une bijection réciproque R de la fonction $z \longmapsto z^2$. Bien entendu, cette application n'est pas injective dès lors que son domaine de définition est étendu à $\mathbb{C}$ tout entier. On se restreint donc au départ aux complexes de partie réelle strictement positive, et au plan complexe privé des réels négatifs à l'arrivée.

  Une fois cet outil construit, le complexe $\mathrm{V}_n(z)$ fait son apparition via une suite satisfaisant une récurrence linéaire d'ordre 2, et la partie s'achève par la preuve qu'il s'agit bien d'une quantité polynomiale (ce qui n'était pas franchement gagné).
- La deuxième partie démarre par l'étude d'une courbe du plan assez classique, appelée lemniscate de Bernoulli (mais dont le nom est, pour des raisons obscures, une nouvelle fois soigneusement caché). On relie ensuite l'intérieur de cette courbe fermée et bornée avec le domaine de convergence de la série génératrice de la suite $(\mathrm{V}_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{V}_n(z)\,\mathrm{Z}^n$.
- La dernière partie est beaucoup plus classique puisqu'elle traite de polynômes orthogonaux pour un produit scalaire de la forme

  $$(f,g) \longmapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)^{\alpha-1/2}\,\mathrm{d}t$$

  On retrouve la famille $(\mathrm{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (à un coefficient de normalisation près) lorsque le paramètre α est égal à 1.

Pour conclure, il s'agit d'un thème assez classique, qui couvre une large partie des chapitres du programme de prépa, mais traité ici d'une façon inhabituelle.

Indications

Partie I

I.A.4 Remarquer que le triangle OBM est isocèle en O.

I.A.5 Utiliser les relations $|z|^2 = z\bar{z}$ et $2\mathrm{Re}(z) = z + \bar{z}$.

I.A.7 Montrer que $z \mapsto z^2$ est la réciproque de R.

I.B.1 L'ensemble des solutions de $\mathrm{E}_{a,b}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.

I.B.3 Utiliser la relation de récurrence double satisfaite par (V_n) pour calculer successivement $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_3$. Factoriser les polynômes en z obtenus pour calculer leurs racines.

I.B.4 Procéder par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ et distinguer selon la parité.

Partie II

II.A.1 Poser $\mathrm{Z} = a + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ puis calculer $|\mathrm{Z}(\mathrm{Z} - 2a)|^2$.

II.B.1 Pour le caractère borné, procéder par l'absurde en prenant une suite $\mathrm{Z} = (\mathrm{Z}_n)$ de points de Ω_z telle que $\lim |\mathrm{Z}| = +\infty$. Pour le caractère fermé, considérer la suite de points $\mathrm{Z}_n = z + \mathrm{R}(z^2 + 1 - 1/n)$.

II.C.1 Utiliser le résultat de I.B.1 avec $a = z$, $b = -1$ et $d = \mathrm{R}(z^2 - 1)$.

II.C.2 Comparer avec le rayon de convergence de $\sum h^{n+1}\mathrm{Z}^n$.

II.C.3 Développer en trois sommes, réindexer puis appliquer la relation de récurrence linéaire satisfaite par V.

II.C.4 Factoriser le dénominateur à l'aide de R.

II.C.5 Développer $1/(1 - q)$ en série entière avec $q = \mathrm{Z}(\mathrm{Z} - 2z)$.

II.C.6 Utiliser l'unicité du développement en série entière.

II.C.7 Montrer que $\mathrm{G}_z(x) = \mathrm{P}_n(x) + x^{n+1}\left[(2z - x)^{n+1}\mathrm{G}_z(x)\right]$ où P_n est un polynôme de degré $2n$ et calculer le coefficient en x^n de P_n. Pour cela, développer l'expression $(2z - x)^p$ avec la formule du binôme puis repérer les termes d'ordre n dans la somme double obtenue.

Partie III

III.A.1 Montrer que $p : t \mapsto (1 - t^2)^{\alpha - 1/2}$ est intégrable sur $]-1\,;1\,[$.

III.A.2 Remarquer que $\varphi_\alpha(1) = 0$.

III.A.3 Effectuer une intégration par parties sur l'intervalle ouvert $]-1\,;1\,[$.

III.B.1 Résoudre cette question ainsi que les deux suivantes en calculant l'image par φ_α de la base canonique de F_n et en observant que la matrice dans cette base est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux deux à deux distincts.

III.B.4 Considérer P, Q associés à des valeurs propres distinctes λ et μ. À l'aide du résultat de la question III.A.3, établir $\lambda \mathrm{S}_\alpha(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \mu \mathrm{S}_\alpha(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$.

III.B.5 Raisonner par l'absurde et calculer $\mathrm{S}_\alpha(1, \mathrm{P})$.

III.C.1 Remarquer que d'après les résultats des questions III.B.1, III.B.2 et III.B.3, les espaces propres de φ_1 sont des droites vectorielles.

III.C.2 Montrer que $\dfrac{1}{1 - 2x\cos t + x^2} = \dfrac{1}{2\mathrm{i}\sin t}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}}{1 - x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}} - \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{1 - x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\right)$.

III.C.5 Utiliser le changement de variable $u = \cos t$ pour calculer $\|\mathrm{V}_n\|^2$.

I. Première partie

I.A.1 Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et pour $z = x + \mathrm{i}y$ on a

$$\mathrm{Re}\,(z) + |z| = x + \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant x + |x| \geqslant 0$$

De plus, la première inégalité est stricte si $y \neq 0$ et la deuxième inégalité est stricte si $x > 0$; en conséquence, $\mathrm{Re}\,(z) + |z| = x + \sqrt{x^2 + y^2}$ est strictement positif pour tout couple $(x, y) \notin \mathbb{R}_- \times \{0\}$. Puisque Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \longmapsto 1/\sqrt{\alpha}$ est définie sur $]\,0\,; +\infty\,[$, on en déduit que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus [\mathbb{R}_- \times \{0\}]$, les nombres

$$\theta(z) = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}(z) = \frac{z + |z|}{\sqrt{2(\mathrm{Re}\,(z) + |z|)}}$$

sont bien définis, de sorte que

$$\boxed{\text{Les fonctions } \theta \text{ et R sont définies sur } \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_-.}$$

I.A.2 Pour $z_1 = 4$, on a $x_1 = 4$, $y_1 = 0$. Par suite, $|z_1| = 4$ et

$$\theta(z_1) = 2\,\mathrm{Arctan}\; 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}(z_1) = \frac{8}{\sqrt{16}} = 2$$

d'où $$\boxed{\mathrm{R}(z_1) = 2, \quad \theta(z_1) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{R}(z_1)^2 = 4}$$

Pour $z_2 = 2\mathrm{i}$, on a $x_2 = 0$ et $y_2 = 2$. Ainsi, $|z_2| = 2$,

$$\theta(z_2) = 2\,\mathrm{Arctan}\; 1 = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad \mathrm{R}(z_2) = \frac{2\mathrm{i} + 2}{2} = 1 + \mathrm{i}$$

et $$\mathrm{R}(z_2)^2 = (1 + \mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$$

d'où $$\boxed{\mathrm{R}(z_2) = 1 + \mathrm{i}, \quad \theta(z_2) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}(z_2)^2 = 2\mathrm{i}}$$

Pour $z_3 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, on a $x_3 = 1$ et $y_3 = -\sqrt{3}$. Par conséquent, $|z_3| = 2$,

$$\theta(z_3) = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \qquad\qquad \mathrm{R}(z_3) = \frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

et $$\mathrm{R}(z_3)^2 = \frac{(\sqrt{3} - \mathrm{i})^2}{2} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$$

d'où $$\boxed{\mathrm{R}(z_3) = \frac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \quad \theta(z_3) = -\frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}(z_3)^2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}$$

> On constate que $\mathrm{R}(z_k)^2 = z_k$ pour $k = 1, 2$ et 3. Autrement dit, pour ces trois valeurs, $\mathrm{R}(z_k)$ est une racine carrée complexe de z_k.

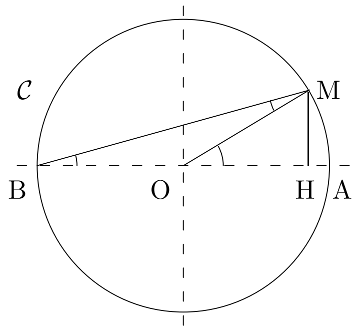
I.A.3 Par définition, Arctan est à valeurs dans $]-\pi/2\,; \pi/2\,[$ donc $\theta(z) \in\;]-\pi\,; \pi\,[$. De plus,

$$\mathrm{Re}\,\big(\mathrm{R}(z)\big) = \frac{\mathrm{Re}\,(z + |z|)}{\sqrt{2(\mathrm{Re}\,(z) + |z|)}} = \frac{\mathrm{Re}\,(z) + |z|}{\sqrt{2(\mathrm{Re}\,(z) + |z|)}}$$

Comme on l'a vu en répondant à la question I.A.1, $\text{Re}\,(z) + |z| = x + \sqrt{x^2+y^2} > 0$ et $\text{Re}\,\big(\text{R}(z)\big)$ est bien strictement positif. En résumé,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_- \qquad \theta(z) \in \left]-\pi\,;\pi\right[\quad \text{et} \quad \text{R}(z) \in \mathcal{P}}$$

I.A.4 Notons O, A, B, M les points d'affixe respective $0, |z|, -|z|, z$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon $|z|$, comme représenté dans la figure suivante :



Comme les angles $\widehat{\text{ABM}}$ et $\widehat{\text{AOM}}$ interceptent le même arc du cercle $\mathcal{C}$ de centre O, le théorème de l'angle au centre garantit que

$$\arg(z) = \widehat{\text{AOM}} = 2\,\widehat{\text{ABM}} = 2\arg\frac{z_\text{M}-z_\text{B}}{z_\text{A}-z_\text{B}}$$

puis

$$= 2\arg\frac{z+|z|}{2|z|} = 2\arg(z+|z|)$$

Enfin, soit H le point d'affixe $x = \text{Re}\,(z)$. Le point H est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses donc le triangle HBM est rectangle en H et

$$\tan\widehat{\text{ABM}} = \tan\widehat{\text{HBM}} = \frac{\text{HM}}{\text{HB}} = \frac{\text{Im}\,z}{|z|+\text{Re}\,(z)} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

Or $\widehat{\text{ABM}} \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$, si bien que la composition par l'arctangente donne

$$\widehat{\text{ABM}} = \text{Arctan}\left(\tan\widehat{\text{ABM}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\theta(z)}{2}$$

Par suite,

$$\boxed{2\,\widehat{\text{ABM}} = \arg(z) = 2\arg(z+|z|) = \theta(z)}$$

I.A.5 Commençons par calculer $\text{R}(z)^2$. On a

$$(z+|z|)^2 = z^2 + 2z|z| + |z|^2 = z\big(z+2|z|+\overline{z}\big) = 2z\big(|z|+\text{Re}\,(z)\big)$$

d'où

$$\big(\text{R}(z)\big)^2 = \frac{2z\big(|z|+\text{Re}\,(z)\big)}{2\big(\text{Re}\,(z)+|z|\big)} = z$$

puis

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_- \qquad \big(\text{R}(z)\big)^2 = z}$$

Autrement dit, $\text{R}(z)$ est une racine carrée de z. On a alors

$$|\text{R}(z)|^2 = |z| \quad \text{et par suite} \quad |\text{R}(z)| = |z|^{\frac{1}{2}}$$

Le résultat de la question I.A.4 assure par ailleurs que

$$\arg\big(\text{R}(z)\big) = \arg\left(\frac{z+|z|}{\sqrt{2\big(\text{Re}\,(z)+|z|\big)}}\right) = \arg(z+|z|) = \frac{\theta(z)}{2}$$

Centrale Maths 2 PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Christophe Fiszka (ENS Cachan) ; il a été relu par Thierry Limoges (ENS Cachan) et Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet propose d'étudier le groupe de Lorentz, qui est un sous-groupe multiplicatif du groupe des matrices inversibles et qui apparaît naturellement en mécanique quantique.

- La première partie est consacrée à l'étude générale de l'ensemble $\mathrm{O}(1,p)$ regroupant les matrices $\mathrm{L} \in \mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ telles que
$$\Delta_{p+1} = {}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1}\mathrm{L} \quad \text{avec} \quad \Delta_{p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,p} \\ 0_{p,1} & -\mathrm{I}_p \end{pmatrix}$$
On étudie la structure de groupe, les invariances, ainsi que les propriétés topologiques (est-il fermé ? compact ?). En particulier, on montre que $\mathrm{O}(1,p)$ correspond aux endomorphismes laissant invariante une certaine forme bilinéaire de la même manière que le groupe orthogonal laisse invariant le produit scalaire canonique.
- La seconde partie traite le cas où les matrices sont de taille 2. De nouveau, par analogie avec l'étude des rotations du plan, on prouve que les matrices de $\mathrm{O}(1,1)$ de déterminant 1 sont des *rotations hyperboliques*, c'est-à-dire des matrices de la forme
$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\ \gamma & \mathrm{sh}\ \gamma \\ \mathrm{sh}\ \gamma & \mathrm{ch}\ \gamma \end{pmatrix}$$
- La dernière partie (la plus longue du sujet) propose de construire un algorithme qui à une matrice de Lorentz associe une décomposition RHR' avec R, R' deux matrices de rotation et H une matrice de rotation hyperbolique. La difficulté de cette partie est essentiellement liée aux calculs.

Ce sujet, plutôt technique, constitue un très bon exercice de révision sur le groupe orthogonal. En effet, les méthodes employées, ainsi que les résultats, sont très similaires à ceux utilisés pour l'étude du groupe des rotations, en particulier pour les petites dimensions (2 et 3). Quelques questions, signalées dans le corrigé, portent sur la structure algébrique de groupe, qui sont hors programme depuis la rentrée 2014.

Indications

I.A.3 [HP] Montrer que pour $\mathrm{L}, \mathrm{M} \in \mathrm{O}(1,p)$, $\mathrm{LM} \in \mathrm{O}(1,p)$ et $\mathrm{L}^{-1} \in \mathrm{O}(1,p)$.

I.A.4 Utiliser la relation ${}^t\mathrm{L} = \Delta_{p+1}\mathrm{L}^{-1}\Delta_{p+1}$.

I.A.5 Penser à la caractérisation des fermés comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

I.B.2 S'inspirer de l'identité de polarisation

$$(\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}) = \frac{1}{4}\left(\|\mathrm{X}+\mathrm{Y}\|^2 - \|\mathrm{X}-\mathrm{Y}\|^2\right)$$

I.B.3 Établir l'équivalence entre (i) et (ii) à partir de la question I.B.1. Puis la formule de la question précédente justifie l'équivalence entre (ii) et (iii).

II.A Dans ces questions, il faut procéder par analogie avec la structure des matrices de $\mathrm{SO}(2)$.

II.A.1 Justifier qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a + b = e^{\theta}$.

II.A.3 Pour résoudre le système de la question précédente, on peut utiliser la relation hyperbolique (hors programme) suivante

$$\mathrm{sh}\,(x-y) \;=\; \mathrm{ch}\,(x)\;\mathrm{sh}\,(y) - \mathrm{sh}\,(x)\;\mathrm{ch}\,(y)$$

Plus généralement, on peut consulter le formulaire à la fin de cet ouvrage. Ne pas oublier le fait que le déterminant vaut 1, c'est-à-dire $ad - bc = 1$.

II.A.4 [HP] Les formules de trigonométrie hyperbolique ainsi que les sous-groupes sont hors programme.

II.B Que dire si γ tend vers $+\infty$?

II.C Traduire la relation ci-dessous en termes de vecteur propre de $\mathrm{L}(\gamma)$

$$e^{\gamma} = \mathrm{ch}\,(\gamma) + \mathrm{sh}\,(\gamma)$$

Sur le même principe, trouver une seconde relation et donc un second vecteur propre pour $\mathrm{L}(\gamma)$.

II.D Un groupe est dit commutatif si tous ses éléments commutent entre eux.

III.B Simplifier l'expression grâce à la question I.B.4 pour justifier l'inégalité de droite. Puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'inégalité de gauche.

III.B,C [HP] Les questions sur les groupes sont hors programme.

III.E.1 Se rappeler que la composée de deux réflexions est une rotation.

III.F.1 D'après la question III.E.1, il existe une rotation qui envoie a sur ${}^t(\|a\|, 0, 0)$.

III.F.2 Utiliser de nouveau les relations de la question I.B.4 en considérant

$$v = {}^t(0,0,1,0) \quad \text{et} \quad v' = {}^t(0,0,0,1)$$

III.F.3 Poser $\mathrm{R}_2 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ où v_1 complète la famille (v_2, v_3) en une base orthonormée (directe). Attention à ne pas oublier que le coefficient en position $(1,1)$ est invariant.

III.G Remarquer que $\begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \beta_1 \\ \alpha & \delta_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}^+(1,1)$.

III.F.4 Appliquer le même principe que la question I.B.4 à d'autres vecteurs de la base canonique.

III.H Reprendre pas à pas la preuve de la décomposition. On peut écrire la procédure en langage Python.

III.I Trouver deux décompositions de la matrice identité.

I. Étude du groupe orthogonal généralisé $\mathrm{O}(1, p)$

I.A.1 On constate que

$$ {}^t\Delta_{p+1}\,\Delta_{p+1}\Delta_{p+1} = \Delta_{p+1}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,p} \\ 0_{p,1} & (-\mathrm{I}_p)^3 \end{pmatrix} = \Delta_{p+1} $$

De plus, $\quad \det(\Delta_{p+1}) = \det(-\mathrm{I}_p) = (-1)^p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ est pair} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

On peut en déduire que

$$ \boxed{\Delta_{p+1} \in \mathrm{O}(1,p) \qquad \text{et} \qquad \Delta_{p+1} \in \mathrm{O}^+(1,p) \iff p \text{ est pair}} $$

I.A.2 Il suffit de remarquer que le déterminant d'une matrice réelle L appartenant à $\mathrm{O}(1,p)$ est inclus dans $\{\pm 1\}$. En effet, la relation ${}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1}\mathrm{L} = \Delta_{p+1}$ implique

$$ \det(\Delta_{p+1}) = \det({}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1}\mathrm{L}) = \det(\mathrm{L})^2 \det(\Delta_{p+1}) $$

Dès lors, $\quad \det(\mathrm{L})^2 = 1 \implies \det(\mathrm{L}) = \pm 1$

Autrement dit, $\quad \boxed{\mathrm{O}(1,p) = \mathrm{O}^+(1,p) \cup \mathrm{O}^-(1,p)}$

I.A.3 (Question hors-programme) Tout d'abord, il est clair d'après la question précédente que $\mathrm{O}(1,p)$ est un sous-ensemble de $\mathrm{GL}_{p+1}(\mathbb{R})$. Pour vérifier que $\mathrm{O}(1,p)$ est bien un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{p+1}(\mathbb{R})$, vérifions les trois propriétés requises :

- l'élément neutre I_{p+1} appartient à $\mathrm{O}(1,p)$ car

$$ {}^t\mathrm{I}_{p+1}\,\Delta_{p+1}\mathrm{I}_{p+1} = \Delta_{p+1} $$

- la stabilité par produit, ce qui signifie

$$ \forall\,\mathrm{L},\mathrm{M} \in \mathrm{O}(1,p) \qquad \mathrm{L}\cdot\mathrm{M} \in \mathrm{O}(1,p) $$

  En effet, ${}^t(\mathrm{LM})\,\Delta_{p+1}\mathrm{LM} = {}^t\mathrm{M}\,\underbrace{({}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1}\mathrm{L})}_{=\Delta_{p+1}}\,\mathrm{M} = {}^t\mathrm{M}\,\Delta_{p+1}\mathrm{M} = \Delta_{p+1}$

- la stabilité par passage à l'inverse dans le sous-groupe, c'est-à-dire

$$ \forall\,\mathrm{L} \in \mathrm{O}(1,p) \qquad \mathrm{L}^{-1} \in \mathrm{O}(1,p) $$

  Pour ce dernier point, multiplions à gauche par $({}^t\mathrm{L})^{-1}$ et à droite par L^{-1} l'égalité ${}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1}\mathrm{L} = \Delta_{p+1}$, ce qui fournit

$$ \Delta_{p+1} = ({}^t\mathrm{L})^{-1}\Delta_{p+1}\mathrm{L}^{-1} = {}^t(\mathrm{L}^{-1})\,\Delta_{p+1}\mathrm{L}^{-1} $$

En conclusion, $\quad \boxed{\mathrm{O}(1,p) \text{ est un sous-groupe de } \mathrm{GL}_{p+1}(\mathbb{R}).}$

De plus, sachant que l'ensemble des matrices de déterminant 1 est aussi un sous-groupe multiplicatif de $\mathrm{GL}_{p+1}(\mathbb{R})$ et qu'une intersection de sous-groupes est encore un sous-groupe, on a de même

$$ \boxed{\mathrm{O}^+(1,p) \text{ est un sous-groupe de } \mathrm{O}(1,p).} $$

I.A.4 On peut expliciter l'inverse d'un élément de $\mathrm{O}(1,p)$ par

$$\mathrm{L}^{-1} = \Delta_{p+1}\,{}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1} \qquad (\mathbf{1})$$

En effet, $$\Delta_{p+1}\,{}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1}\mathrm{L} = \Delta_{p+1}^2 = \mathrm{I}_{p+1}$$

Par la structure de groupe de $\mathrm{O}(1,p)$, $\mathrm{L}^{-1} \in \mathrm{O}(1,p)$ donc ${}^t\mathrm{L} \in \mathrm{O}(1,p)$.

$$\boxed{\text{Si L appartient à } \mathrm{O}(1,p) \text{ alors } {}^t\mathrm{L} \text{ aussi.}}$$

I.A.5 Considérons les applications

$$\mathrm{F}\colon \begin{cases} \mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R}) \\ \quad\mathrm{L} \qquad\longmapsto {}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1}\mathrm{L} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \det\colon \begin{cases} \mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad\mathrm{L} \qquad\longmapsto \det \mathrm{L} \end{cases}$$

Elles sont continues en tant que fonctions polynomiales en les coefficients de L. Or

$$\mathrm{O}(1,p) = \mathrm{F}^{-1}(\{\Delta_{p+1}\}) \qquad \mathrm{O}^+(1,p) = \mathrm{F}^{-1}(\{\Delta_{p+1}\}) \cap \det{}^{-1}(\{1\})$$

et $$\mathrm{O}^-(1,p) = \mathrm{F}^{-1}(\{\Delta_{p+1}\}) \cap \det{}^{-1}(\{-1\})$$

Sachant que les singletons sont des ensembles fermés et qu'une intersection finie d'ensembles fermés est fermée, on en déduit que

$$\boxed{\mathrm{O}(1,p),\ \mathrm{O}^+(1,p) \text{ et } \mathrm{O}^-(1,p) \text{ sont des fermés de } \mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R}).}$$

> La partie I.B porte sur les formes quadratiques, hors programme depuis 2014. Toutefois, tout est défini dans l'énoncé pour pouvoir répondre aux questions.

I.B.1 Introduisons $\mathrm{E} = (\mathrm{E}_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$, identifié à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De sorte que AE_j désigne la j-ième colonne de A. Puis ${}^t\mathrm{E}_i\,\mathrm{AE}_j$ représente le coefficient de A à la i-ième ligne et j-ième colonne. Ainsi, si on note $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{i,j})$ et $\mathrm{B} = (\mathrm{B}_{i,j})$, l'hypothèse ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{AY} = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{BY}$ pour tout X, Y appartenant à $\mathbb{R}^n$ appliquée à $\mathrm{X} = \mathrm{E}_i$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{E}_j$ impose que pour tout couple (i,j), $\mathrm{A}_{i,j} = \mathrm{B}_{i,j}$. C'est-à-dire exactement $\mathrm{A} = \mathrm{B}$. En résumé,

$$\boxed{\text{Si pour tout } (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in (\mathbb{R}^n)^2, \text{ on a } {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{AY} = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{BY}, \text{ alors } \mathrm{A} = \mathrm{B}.}$$

I.B.2 Inspirons-nous de l'identité de polarisation. Pour tout indice j, on a

$$4v_jv'_j = (v_j + v'_j)^2 - (v_j - v'_j)^2$$

Par sommation, $$\boxed{\varphi_{p+1}(v,v') = \frac{1}{4}\left(q_{p+1}(v+v') - q_{p+1}(v-v')\right)}$$

I.B.3 Justifions que (i) est équivalent à (ii) puis que (ii) est équivalent à (iii).

- $\underline{(i) \Longleftrightarrow (ii)}$ Soit $\mathrm{L} \in \mathrm{O}(1,p)$, c'est-à-dire ${}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1}\mathrm{L} = \Delta_{p+1}$. D'après la question I.B.1, (i) est équivalent à dire que pour tout couple $(\mathrm{V},\mathrm{V}') \in \left(\mathbb{R}^{p+1}\right)^2$,

  $${}^t\mathrm{V}\ {}^t\mathrm{L}\,\Delta_{p+1}\mathrm{LV}' = {}^t\mathrm{V}\,\Delta_{p+1}\mathrm{V}'$$

  ou encore $${}^t(\mathrm{LV})\,\Delta_{p+1}\mathrm{LV}' = {}^t\mathrm{V}\,\Delta_{p+1}\mathrm{V}'$$

  L'assertion (i) est donc équivalente à

  $$\forall\,(v,v') \in (\mathbb{R}^{p+1})^2 \qquad \varphi_{p+1}(f(v),f(v')) = \varphi_{p+1}(v,v')$$