

Dominique Souder

Le grenier de Math-man



Au début des grandes vacances qui ont suivi ma classe de première S, je suis allé chez ma grand'mère, comme souvent, car d'une part je m'ennuie seul à la maison quand mes parents travaillent, et d'autre part, je suis content de la voir et de lui rendre quelques services (elle a maintenant 87 ans).

Ma grand'mère est très connue dans son village, elle est très serviable et appréciée, et on lui a confié souvent des travaux de confiance, mais malheureusement ceux-ci peuvent maintenant dépasser un peu ses forces physiques. Un voisin était décédé il y a un mois et les héritiers, qui vivaient à l'étranger, ont demandé à ma grand'mère de trier parmi tout ce qui restait dans le grand grenier du défunt ce qu'elle voulait récupérer, pour elle, ou sélectionner pour donner à la bibliothèque du village, ou aux voisins. Mais la tâche était immense, les objets entassés étant surtout des livres, des documents, des revues, et des disques, ce qui pèse ! Ce n'est pas de la manutention pour vieille dame... De plus les héritiers étaient assez pressés que tout soit vidé pour faire visiter dans de meilleures conditions la propriété en vue de vendre. Ils avaient même dit à ma grand'mère que ce qui ne l'intéressait pas serait pour l'Association Emmaüs, si celle-ci en voulait...

Je suis donc allé voir l'étendue du travail à faire...

Voilà, c'est ainsi que cette histoire a commencé, il y a six mois, et je ne soupçonnais pas dans quelle aventure je mettais les pieds en montant les marches de l'escalier menant au fameux grenier. J'ai eu d'abord une vision de capharnaüm incroyable, des piles de livres et revues dans tous les coins, plus ou moins écroulées, à enjamber... Difficile de marcher sans écraser quelque chose... Puis j'ai remarqué des bibliothèques vitrées en bon état qui, en fait, étaient garnies soit de disques soit de bandes dessinées. Comment les héritiers pouvaient-ils laisser tout cela, en mésestimant la valeur ? Ma deuxième impression a été que ce grenier était vivant, une belle

lumière arrivait par des lucarnes bien placées, et j'ai senti que cet endroit de dépôt avait été aussi un lieu de plaisir ou de refuge ; il exprimait comme une présence chaleureuse, il y avait une atmosphère !

En jetant un œil sur les livres et revues, on devinait que le monsieur avait dû être professeur, mais on pouvait s'interroger : de musique ou de maths ? Le sort des livres de maths fut vite réglé : un de mes professeurs s'occupait d'une association d'entraide à la Roumanie, et je savais que ces livres seraient réutilisés avec reconnaissance là-bas.

Je savais donc déjà que je trimballerais des brouettes de cartons de livres chez ma grand'mère, en transit pour la Roumanie.

Ce que je n'avais pas évalué c'était le grand nombre des documents personnels, rédigés à la main, qui les accompagnaient. J'ai mis le nez dedans, et ça m'a vraiment intéressé. Il y avait des problèmes plus ou moins scolaires, mais surtout des sujets de jeux mathématiques reconnaissables à leur humour et leur fantaisie. Finalement c'est ce que j'ai pris soin de rassembler dans un carton tout de suite, en premier, et d'emporter dans ma chambre...

Je vous propose une poignée de ces exercices dans les parties « impaires » de ce livre. J'ai apprécié pour quelques uns d'entre eux de comprendre comment ils avaient été fabriqués. En effet, dans certains cas (voir la première partie), le prof avait présenté sur sa fiche un problème d'apparence « scolaire » avec des questions progressives, et ensuite donné le sujet du jeu mathématique que cela lui avait inspiré. Evidemment, cela rend les jeux plus faciles, mais il y en avait d'assez ardues, et comme je ne suis pas un spécialiste même si j'aime ça, cela m'a bien aidé à les résoudre. J'ai encore senti comment pouvaient venir les idées de ces inventeurs de jeux, ce qui m'avait toujours assez intrigué. Il faudra que j'essaie à partir d'un bouquin de maths, moi aussi, d'en rédiger avec invention et humour...

Un des mérites de mon passage en ce grenier sera peut-être de me débloquer la créativité, en tout cas je l'espère...

** de nombreux documents faits « main » en particulier des figures et dessins, sont reproduits tels quels : ils sont imparfaits mais témoignent du côté « vieux parchemins testamentaires » d'un héritage abandonné dans ce grenier.*

Première partie

Quelques activités mathématiques et ludiques guidées...

J'ai choisi de vous proposer d'abord des activités pas vraiment immédiates (il faut souvent de la persévérance pour aller au bout) mais où il n'y a pas trop d'initiative à prendre. Les textes étaient présentés comme suit, je ne sais pas à qui ils étaient destinés... Je n'ai rien changé à leur rédaction, car je crois que c'est finalement assez proche de ce qui se passe le plus souvent en classe, et dans l'ensemble c'est peu déstabilisant ! Les jeux maths où il faut faire son chemin tout seul, ou bien de la vraie recherche, ce sera pour plus tard !

Ayez donc avant tout du courage !

- 1. Calculatrices et Fermat (ou presque...)**
- 2. Problème d'aires**
- 3. Le roi des décodeurs**
- 4. Problème de trapèze**
- 5. Un peu d'arithmétique**
- 6. La formule du professeur Shadoko**
- 7. Le chandelier**
- 8. La naissance de l'éclair de la compréhension mathématique**
- 9. Solutions.**

Activité 1 :

Pour les fondus de chiffres et de calculatrices...

a) à propos du rallye mathématique de Paris du dimanche 28 mai 2000...

Voici deux questions proposées en rapport avec la vie parisienne :

– **quelle est la date de naissance du trottoir dans Paris ?**

Vous le saurez si vous calculez deux fois la racine carrée de 644 809.

– **à partir de quelle date le stationnement a-t-il été réglementé ?**

Vous le trouverez si vous triplez le nombre premier qui est la racine cubique de 208 527 857. Rappelons que si votre calculatrice ne possède pas de touche racine cubique vous pouvez faire puissance $1/3$.

b) quand l'affichage est insuffisant, que faire ?

– Imaginons que vous vouliez calculer $20\,615\,673^4$.

La machine va afficher $1.806300773 \times 10^{29}$ et c'est bien sûr un résultat approché.

Vous pouvez demander à la machine de soustraire du résultat affiché $1.806300773 \times 10^{29}$.

Elle répond -7.8×10^{18} (c'est négatif) et vous savez alors que le 3 était un arrondi par excès mais que le vrai chiffre est à cet endroit un 2.

Vous pouvez recommencer et faire calculer $20\,615\,673^4 - 1.806300772 \times 10^{29}$.

Le résultat sera 9.22×10^{19} . Vous savez maintenant que le vrai résultat démarre ainsi $1.80630077292 \times 10^{29}$ vous n'êtes pas sûr qu'après le dernier 2 il y ait un autre 2, ce peut être un 1 suivi d'un « gros » chiffre...

– Imaginons que vous vouliez toutes les décimales exactement...

Vous pouvez découper le nombre et utiliser les identités remarquables.

Commençons par calculer le carré : $20615673^2 = (206 \times 10^5 + 15673)^2$

$$= 42436 \times 10^{10} + 245642929 + 2 \times 10^5 \times 15673$$

$= 425\ 005\ 973\ 242\ 929$ nous pouvons continuer avec la puissance quatre.

$$2061560673^4 = (425 \times 10^{12} + 5973242929)^2$$

$$= 180625 \times 10^{24} + 2 \times (425 \times 10^{12} \times 5973242929) + (59732 \times 10^5 + 42929)^2$$

$$= 180625 \times 10^{24} + 2 \times 425 \times 10^{12} \times (59732 \times 10^5 + 42929) + 3567911824 \times 10^{10}$$

$$+ 1842899041 + (2 \times 10^5 \times 59732 \times 42929)$$

$$= 180625 \times 10^{24} + 507722 \times 10^{19} + 36489650 \times 10^{12} + 3567911824 \times 10^{10}$$

$$+ 1842899041 + 5128470056 \times 10^5$$

$$= 180\ 630\ 077\ 292\ 169\ 281\ 088\ 848\ 499\ 041.$$

Ce dernier résultat est obtenu en faisant l'addition à la main, en ayant bien garde de disposer les chiffres les uns en dessous les autres par tranches de trois chiffres.

Si cela ne vous décourage pas, je vous propose de calculer :

2682440^4 , puis 15365639^4 et enfin 18796760^4 .

Ensuite, calculez la somme des trois précédents résultats, et comparez avec 20615673^4 .

A ce moment vous pourrez jouer au mathématicien professionnel et dire :

« **Fermat** avait deviné qu'il n'existe pas de nombres entiers a , b , c vérifiant $a^n + b^n = c^n$, lorsque n est plus grand que 2 (par exemple pour $n = 4$ l'équation $a^4 + b^4 = c^4$ n'a pas de solutions entières). Mais moi je me suis intéressé au problème suivant :

« l'équation $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$ a-t-elle des solutions entières en a , b , c , d ? »

Eh bien j'ai trouvé qu'elle en avait au moins une :

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 2061560673^4.$$

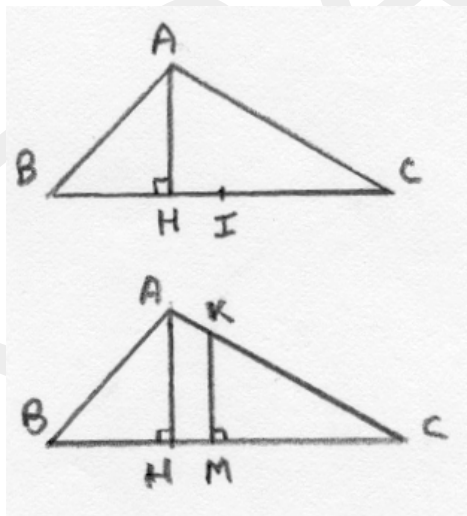
Et j'en suis fier !

2

Problème d'aires...

Partie A.

- 1). Dans ce triangle ABC, le point I est le milieu de [BC].



Montrer que l'aire de ABC est égale à $CI \times AH$

- 2). Sachant que le segment [MK] partage le triangle ABC en 2 régions de même aire, montrer que $CM \times MK = CI \times AH$. En déduire que $CM/CI = AH/MK$.

- 3). Comparer les rapports CH/CM et AH/MK , puis CM/CI et CH/CM .

En déduire que $CM^2 = CI \times CH$.

Partie B.

1). Construire un segment $[AH]$ de 12 cm, puis une droite (xy) perpendiculaire en H à (AH) . Placer sur (xy) les points B et C tels que $AB = 13$ cm et $AC = 15$ cm.

2). Calculer les longueurs BH, CH, BC.

3). Calculer l'aire du triangle ABC.

4). Soit I le milieu de $[BC]$. Calculer la longueur CI.

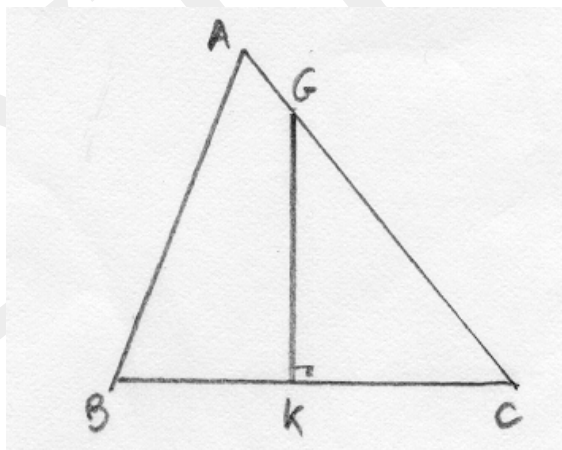
5). Utiliser le A3) pour placer un point M sur $[BC]$ et un point K sur $[AC]$ tels que :

(MK) soit perpendiculaire à (BC) et que (MK) partage le triangle ABC en 2 régions de même aire après avoir calculé CM.

6). Vérifier en la calculant que l'aire du triangle CMK est la moitié de celle du triangle ABC.

Partie C : une application sous forme de jeu mathématique

Le grand architecte *Eugène Iteur* adorait les nombres entiers, admirait *Pythagore* et *Thalès*, ce qui ne l'empêchait pas de rester fidèle à ses racines, la région du Puy de Dôme (département 63).



Il y acheta sur ses vieux jours un terrain triangulaire ABC dont les dimensions étaient sans doute malicieusement en mètres $AB = 13\sqrt{63}$,

$AC = 15\sqrt{63}$ et $BC = 14\sqrt{63}$.

Quand il mourut, ses deux fils, Délim et Facil eurent à se partager le terrain.

- Le notaire déclara que les deux parts auraient la même aire.
- Délim souhaita un mur de séparation rectiligne entre les 2 régions.
- Facil dit qu'il n'y avait qu'à le faire perpendiculaire au côté [BC].

Quelle est, arrondie au centimètre, la longueur du mur (noté KG le dessin) séparant les terrains de Délim lteur et Facil lteur ?

3

A vos calculatrices...

Le roi des décodeurs

Dans la vie, on est amené à manipuler des numéros d'identification qui peuvent être assez longs, et qui sont munis d'une clé permettant de détecter (pas toujours) des erreurs de saisie éventuelles.

- Le numéro I.N.S.E.E. est un exemple bien connu, dont la clé s'obtient en le divisant par 97 puis en conservant la différence entre 97 et le reste de cette division.

Nous allons évoquer aujourd'hui des exemples moins connus, entre autres celui d'un numéro de compte bancaire, et le numéro I.S.B.N. (International Standard Book Number) qui permet d'identifier les livres publiés.

La clé du relevé d'identité bancaire (RIB).

Le relevé d'identité bancaire comporte de gauche à droite 5 chiffres pour le code de la banque, 5 chiffres pour le code du guichet, 11 chiffres pour le numéro de compte, 2 chiffres pour la clé. La clé K est calculée de la manière suivante : soit A le nombre constitué par les 21 chiffres de gauche ; on calcule le reste r de la division euclidienne de $100 \times A$ par 97. On prend $K = 97 - r$.

a) Calculons la clé ** pour le relevé 14607 00052 05215075057 **.

Certains d'entre vous auront peut-être plaisir à faire le calcul à la main, mais la plupart souhaiteront le mener avec une calculatrice. Voilà comment procéder :

- écrire $100 \times A$ sous la forme $H \times 10^{12} + M \times 10^6 + L$ (trouver H , M , L)

- diviser H par 97. Prendre sur l'affichage la partie entière de ce quotient, la multiplier par 97 et l'enlever de H . On trouve 22.

– coller ce 22 devant M, diviser le nombre obtenu soit 22 521 507 par 97, en garder la partie entière, la multiplier par 97, enlever ce résultat du nombre 22 521 507. On trouve 47.

– coller ce 47 devant L, diviser le nombre obtenu soit 47 505 700 par 97, en garder la partie entière, la multiplier par 97, enlever ce résultat du nombre 47 505 700. Vous trouvez encore 47.

– La clé K est $97 - 47 = 50$.

b) A vous de jouer : calculez la clé pour le compte 15807 00004 03819213661.

c) Voici un numéro de compte et sa clé : 10607 00004 04019685902 20

Vérifiez qu'il y a une erreur. En admettant qu'elle ne porte que sur un seul des 21 premiers chiffres, pouvez-vous le corriger ?

Le numéro I.S.B.N. (le document du grenier date de bien avant 2007 et concerne donc les livres édités avant cette date : depuis, le code est passé à 13 au lieu de 10)

Exemple : 2 226 09618 3.

Le chiffre 2 à gauche indique le pays, ici une édition en français. Le bloc de trois chiffres 226 indique le numéro de l'éditeur, ici Albin Michel. Le bloc de cinq chiffres 09618 indique le numéro de l'ouvrage. Et le chiffre final 3 est la clé.

L'*International Standard Book Number* utilise des mots de longueur 10 constitués avec les chiffres 0, 1, ..., 9 et le symbole X (qui représente le nombre 10) ; le symbole X ne sera utilisé, si nécessaire, que pour la clé. Exemple : 2 841 80013 X.

– Comment se calcule la clé ?

Chacun des dix chiffres a un numéro attribué de 1 à 10 à partir de la gauche (y compris donc la clé) $a_1 a_2 \dots a_{10}$. On calcule la clé a_{10} de façon que le total $(1a_{10} + 2a_9 + 3a_8 + 4a_7 + 5a_6 + 6a_5 + 7a_4 + 8a_3 + 9a_2 + 10a_1)$ soit divisible par 11, c'est-à-dire qu'on cherche combien ajouter à $(10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 7a_4 + 6a_5 + 5a_6 + 4a_7 + 3a_8 + 2a_9)$ pour atteindre le plus petit multiple de 11 supérieur.

a) Vérifiez que la clé est bien X (dix) dans l'exemple plus haut.

b) Montrer qu'il y a une erreur dans le code 0 471 62587 0. Sachant que la clé est bonne, pouvez-vous corriger l'erreur ?

c) Trouvez toutes les valeurs possibles des nombres a et b dans le code 2 842 250ab 1 pour qu'il soit valide.

Le code UPC (Universal Product Code)

Voici le code UPC utilisé avec les codes barres. Il utilise des nombres de 12 chiffres valant de 0 à 9, soit $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ (11 chiffres pour désigner un produit, et une clé), de telle sorte que $3(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}) + (a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12})$ soit divisible par 10.

a) Calculer la clé si le nombre formé par les 11 chiffres de gauche est 35602387190.

b) Soit le code 898989898989. Vérifier qu'il y a une erreur. Peut-on savoir où ?

Le code correcteur de Hamming

Ici on se propose non plus seulement de détecter, mais de corriger une erreur éventuelle. Considérons les nombres de 10 chiffres (numéros de téléphone par exemple)

$a_1 a_2 \dots a_{10}$ où les a_i pour i entre 1 et 10, peuvent prendre les valeurs 0,1,..., 9. On rajoute une clé constituée de deux chiffres $a_{11} a_{12}$ où a_{11} et a_{12} peuvent prendre les valeurs 0,1,..., 9 et aussi la valeur X, représentant le nombre 10. La clé est calculée de telle sorte que :

a_{11} soit le reste de la division par 11 de la somme des dix premiers a_i

a_{12} soit le reste de la division de $(1a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5+6a_6+7a_7+8a_8+9a_9+10a_{10})$ par 11.

a) calculer la clé pour le numéro 0491413940.

b) On sait qu'il y a une erreur et une seule dans 049132900000. La corriger, après avoir calculé la clé correspondant aux dix premiers chiffres.

c) Même question avec le numéro 25871934607X.

Un jeu mathématique dérivé : le redresseur de codes

L'agent 007 est informé du département de sa future mission par deux séries de 12 chiffres. Les 10 premiers $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ (valeurs de 0 à 9) sont suivis d'une clé $a_{11} a_{12}$.

a_{11} est le reste de la division par 11 de la somme des 10 chiffres de gauche.

a_{12} est le reste de la division par 11 de la somme des 10 produits $i \times a_i$ d'un chiffre a_i par son numéro i de 1 à 10 ; a_{11} et a_{12} peuvent prendre la valeur 10 notée X.

Par sûreté, chacun des deux codes présente une erreur et une seule sur l'un de ses 12 chiffres.

La valeur par laquelle il faut remplacer le chiffre erroné de 258 719 346 07X sera le chiffre des dizaines du département. La valeur elle-même du chiffre erroné de 049 132 900 000 sera le chiffre des unités du département. Dans quel département doit officier 007 ?

Références : – *le code correcteur de Hamming, bulletin APMEP 432, page 91*

– *Cours et activités en arithmétique pour les classes de terminales, IREM de Marseille 1999.*

4

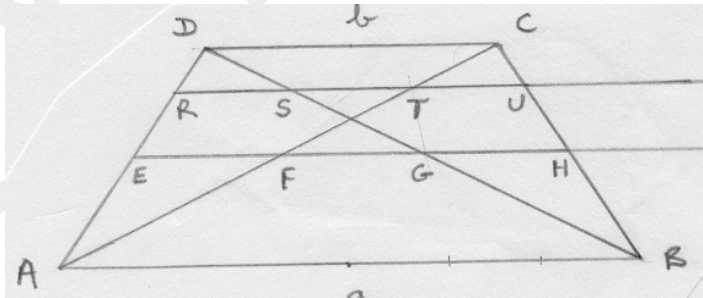
Un problème de Trapèze

Soit un trapèze isocèle ABCD dont les bases ont pour longueurs en cm $AB=a$, $CD=b$.

1°) Comment construire deux droites parallèles aux bases telles que sur chacune d'elles les côtés latéraux et les diagonales du trapèze déterminent trois segments de même longueur.

2°) Calculer leurs longueurs en fonction de a et b .

Sur la figure idéale suivante faite pour vous aider à mieux saisir le problème, on aura d'une part $EF=FG=GH$, d'autre part $RS=ST=TU$.



Aide éventuelle 1.

Tracer votre trapèze isocèle, et compléter votre figure.

Les droites (AD) et (BC) se coupent au point Z. L'axe de symétrie du trapèze coupe [DC] en son milieu Y et [AB] en son milieu X ; l'axe passe par le point de concours O des diagonales.

1) Construire sur une demi droite $[Ax)$ une graduation régulière de 3 divisions, puis partager par projection $[AB]$ en 3 segments de même longueur $Am=mn=nB$.

2) (Zm) coupe (AC) en F et (DB) en S. (Zn) coupe (DB) en G et (AC) en T.

(FG) coupe (AD) en E et (BC) en H. (ST) coupe (AD) en R et (BC) en U.

Pourquoi (ST) et (FG) sont-elles parallèles aux bases ?

Montrer que $EF=FG=GH$ et que $RS=ST=TU$.

Récapituler le programme de construction qui est la solution du problème.

Aide éventuelle 2.

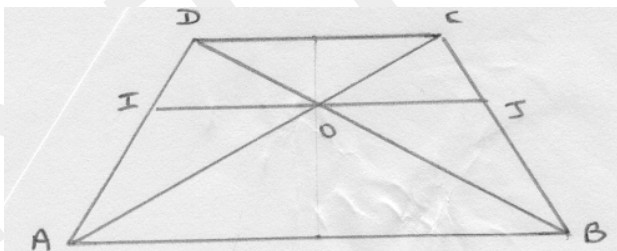
1) Extrayons le schéma suivant de la figure idéale, et traçons la parallèle aux bases passant par le point O. Elle coupe (AD) en I et (CB) en J.

Pourquoi les triangles OCD et OAB ont-ils des côtés proportionnels ?

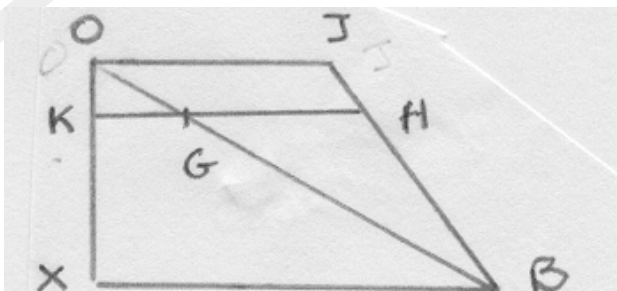
Soit k le nombre tel que $OB = ak$. Calculer DO à l'aide de b et k.

Comparer les triangles BOJ et BDC. Calculer OJ à l'aide de b et k.

3) Extrayons le schéma suivant de la figure idéale :



Appelons K l'intersection de (FG) avec l'axe du trapèze.

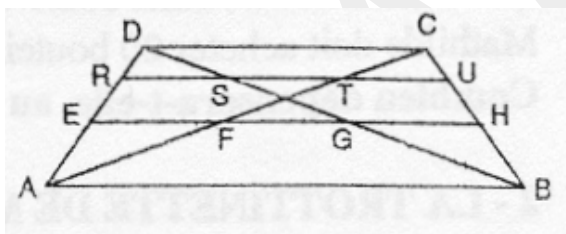


On pose $KG = x$. Calculer GH et KH à l'aide de x.

- 3) Comparer les triangles OKG et OXB. Montrer que $OG/OB = x/a$.
- 4) Vérifier que $GB/OB = 1 - OG/OB$. Calculer GB/OB à l'aide de a et x .
- 5) En comparant les triangles GHB et OJB, calculer x à l'aide de a et b .
En déduire GH en fonction de a et b .
- 6) Calculer TU à l'aide de a et b .

Voici maintenant une transformation de ce problème en un vrai petit bijou, un exercice pour le championnat de jeux mathématiques de la FFJM...

Agathe a gagné au championnat féminin de jeux maths un bijou en argent (ABCD trapèze isocèle de bases 49 mm et 65 mm) incrusté de deux fils d'or (EH et RU parallèles aux bases, que les diagonales virtuelles AC et BD partageraient en trois segments égaux $EF = FG = GH$ et $RS = ST = TU$).



Agathe a su dire la longueur totale en mm du fil d'or employé. Et vous ?