

Mathieu Kieffer

66 leçons pour l'agrégation de mathématiques

avec 10 fiches de synthèse

2^e édition



ellipses

Table des matières

1	Groupes monogènes. Groupes cycliques. Exemples	23
1.1	Groupes monogènes	23
1.2	Sous-groupes d'un groupe monogène	25
1.2.1	D'un groupe monogène infini	25
1.2.2	D'un groupe cyclique	26
1.3	Exemples	28
1.3.1	Produit de groupes cycliques	28
1.3.2	Sur un corps fini	29
2	Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications	31
2.1	Permutations d'un ensemble fini	31
2.2	Décomposition d'une permutation	35
2.3	Signature	36
2.4	Applications	38
2.4.1	Théorème de Cayley	38
2.4.2	Le jeu du taquin	39
3	Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications	41
3.1	L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$	41
3.2	Applications	43
3.2.1	Théorème des restes chinois	43
3.2.2	Théorèmes d'Euler et de Fermat	44
3.2.3	Théorème de Wilson	45
3.2.4	Critère d'Eisenstein	46
4	Nombres premiers. Propriétés et applications	47
4.1	Présentation	47
4.2	Applications	49

4.2.1	Théorèmes d'Euler et de Fermat	49
4.2.2	Théorème de Wilson	51
4.2.3	Système R.S.A.	51
4.2.4	Critère d'Eisenstein	52
5	PGCD dans $\mathbb{K}[X]$, où \mathbb{K} est un corps commutatif, théorème de Bézout. Algorithme d'Euclide. Applications	55
5.1	Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$	55
5.2	Théorème de Bézout	58
5.3	Applications	60
5.3.1	Théorème fondamental de l'arithmétique	60
5.3.2	Lemme des noyaux	62
6	Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une famille de vecteurs	65
6.1	Dimension d'un espace vectoriel	65
6.2	Relations entre les dimensions	68
6.3	Rang d'une famille de vecteurs	70
6.4	Carrés magiques	71
7	Formes linéaires, hyperplans, dualité en dimension finie. Exemples	73
7.1	Formes linéaires et hyperplans	73
7.2	Orthogonalité et dualité	75
7.3	Formes linéaires et sous-espaces vectoriels	79
7.4	Théorème de représentation de Fréchet-Riesz	80
8	Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications	81
8.1	Généralités	81
8.2	Applications	85
8.2.1	Équations différentielles	85
8.2.2	Théorème de Cayley-Hamilton	86
9	Changements de bases en algèbre linéaire. Applications	89
9.1	Changements de bases	89
9.1.1	Matrices de passages	89
9.1.2	Matrices équivalentes	91
9.1.3	Matrices semblables	93
9.2	Applications	94
9.2.1	Diagonalisation d'une matrice carrée	94

9.2.2	Trigonalisation d'une matrice carrée	95
9.2.3	Calcul des puissances d'une matrice carrée	97
9.2.4	Suites récurrentes linéaires à coefficients constants	98
10	Déterminants. Applications	101
10.1	Déterminant d'une matrice	101
10.1.1	Généralités	101
10.1.2	Matrice de permutation	104
10.1.3	Matrice triangulaire	105
10.2	Calculs de déterminants	106
10.2.1	Déterminant d'un produit	106
10.2.2	Développement suivant une ligne ou une colonne	107
10.3	Applications	110
10.3.1	Déterminant de Vandermonde	110
10.3.2	Formule de Cramer	111
10.3.3	Inverse d'une matrice	113
11	Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications	115
11.1	Opérations élémentaires et propriétés	115
11.2	Applications	119
11.2.1	Calcul du rang d'une matrice	119
11.2.2	Résolution d'un système linéaire	120
11.2.3	Calcul de l'inverse d'une matrice	121
11.2.4	Déterminant de Vandermonde	121
11.2.5	Décomposition LU d'une matrice	123
12	Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3	127
12.1	Généralités	127
12.2	Cas de la dimension 2	131
12.3	Cas de la dimension 3	133
13	Utilisation des nombres complexes en géométrie	139
13.1	Nombres complexes et géométrie	139
13.2	Deux lieux géométriques	140
13.3	Similitudes directes	142
13.4	Quelques théorèmes	143
13.4.1	Caractérisation d'un triangle équilatéral	143

13.4.2	Caractérisation de la cocyclicité	144
13.4.3	Théorème de Ptolémée	145
13.4.4	Théorème de Napoléon	145
13.4.5	Théorème de Van Aubel	146
14	Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien.	
	Applications	149
14.1	Généralités	149
14.2	Réduction	151
14.3	Applications	153
14.3.1	Endomorphisme symétrique sur l'espace des polynômes	153
14.3.2	Racine cubique d'une matrice symétrique réelle	154
14.3.3	Endomorphismes symétriques positifs	156
14.3.4	Décomposition polaire	158
15	Réduction et classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie. Cas d'un espace euclidien.	
	Applications géométriques	161
15.1	Réduction d'une forme quadratique	162
15.2	Classification des formes quadratiques réelles	165
15.3	Applications géométriques	168
15.3.1	Classement des coniques	168
15.3.2	Extremum d'une fonction de plusieurs variables	170
16	Isométries du plan affine euclidien, décomposition canonique.	
	Applications	173
16.1	Groupe des isométries du plan affine	173
16.2	Classification des isométries du plan affine	174
16.3	Applications	178
16.3.1	Expression complexe	178
16.3.2	Groupe diédral	179
17	Barycentres. Applications	181
17.1	Fonction vectorielle de Leibniz	181
17.2	Applications	184
17.2.1	Caractérisation des applications affines	184
17.2.2	Théorème de Ceva	185
17.2.3	Fonction scalaire de Leibniz	186
17.2.4	Théorème de Gauss-Lucas	187
17.2.5	Fonction convexe	187

18 Applications affines en dimension finie. Propriétés et exemples	189
18.1 Généralités	189
18.2 Homothéties et translations	192
18.3 Projecteurs et symétries	195
18.4 Points fixes d'une application affine	197
19 Droites et cercles dans le plan affine euclidien	199
19.1 Droites du plan affine euclidien	199
19.2 Cercles du plan affine euclidien	202
19.3 Lignes de niveau	205
19.4 Inversion	206
20 Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes	209
20.1 L'algèbre $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$	209
20.2 Dérivation de polynômes	212
20.3 Théorème fondamental de l'algèbre	216
20.4 Relations coefficients-racines	218
21 Notion de rang en algèbre linéaire. Applications	219
21.1 Rang d'une famille de vecteurs	219
21.2 Rang d'une application linéaire	220
21.3 Rang d'une matrice	222
21.4 Applications	225
21.4.1 Systèmes linéaires	225
21.4.2 Interpolation de Lagrange	226
21.4.3 Somme de deux applications linéaires	226
21.4.4 Règle de Hörner	226
22 Coniques	229
22.1 Définitions monofocales	229
22.2 Équations cartésiennes	230
22.3 Représentations paramétriques	232
22.4 Équation polaire	233
22.5 Définitions bifocales	234
22.6 Réduction des coniques	235

23 Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications	241
23.1 Généralités	241
23.2 Diagonalisation	245
23.3 Trigonalisation	247
23.4 Décomposition de Jordan-Dunford	248
23.5 Applications	251
23.5.1 Calcul des puissances d'une matrice carrée	251
23.5.2 Suites récurrentes linéaires simultanées du premier ordre à coefficients constants	251
23.5.3 Système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants	251
24 Systèmes d'équations linéaires. Applications	253
24.1 Généralités sur les systèmes linéaires	253
24.2 Applications	258
24.2.1 Avec un paramètre	258
24.2.2 Inversion d'une matrice	259
24.2.3 Points alignés	260
24.2.4 Points coplanaires	261
24.2.5 Droites concourantes ou parallèles	262
24.2.6 Que la lumière soit	263
25 Valeurs propres et vecteurs propres. Recherche et utilisation	265
25.1 Recherche des valeurs propres	265
25.2 Utilisation des valeurs propres	269
25.2.1 Diagonalisation d'un endomorphisme	269
25.2.2 Théorème spectral et conséquences	271
25.2.3 Points fixes d'une application affine	274
26 Arithmétique dans \mathbb{Z}	275
26.1 Division euclidienne dans \mathbb{Z}	275
26.2 PGCD et PPCM de deux entiers relatifs	276
26.3 Équations diophantiennes	279
26.4 Nombres premiers	280
27 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications	283
27.1 Généralités	283
27.2 Applications	287

27.2.1	Groupe des symétries du cube	287
27.2.2	Combinatoire	289
27.2.3	Groupes finis	291
27.2.4	Théorème de Cauchy	292
28	Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications	293
28.1	Endomorphisme diagonalisable	293
28.2	Applications	296
28.2.1	Décomposition de Jordan-Dunford	296
28.2.2	Calcul des puissances d'une matrice carrée	298
28.2.3	Suites récurrentes linéaires simultanées du premier ordre à coefficients constants	300
28.2.4	Système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants	302
29	Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications	305
29.1	Généralités	305
29.2	Décomposition en éléments simples	308
29.3	Applications	311
29.3.1	Quelques décompositions en éléments simples	311
29.3.2	Un calcul de primitive	311
29.3.3	Un calcul de somme	312
30	Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines de l'unité. Applications	313
30.1	Groupe des nombres complexes de module 1	313
30.2	Racines de l'unité	316
30.3	Applications	318
30.3.1	Calculs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	318
30.3.2	Racines n -ièmes d'un nombre complexe	319
30.3.3	Triangle équilatéral dans le plan	319
30.3.4	Calculs de sommes	320
31	Racines d'un polynôme à une indéterminée. Relations coefficients- racines. Applications	323
31.1	Racines d'un polynôme à une indéterminée	323
31.2	Relations coefficients-racines	327
31.3	Applications	328

31.3.1	Calcul d'une fonction symétrique	328
31.3.2	Résoudre un système d'équations algébriques symétriques . . .	329
31.3.3	Zéros de polynômes dérivés successifs	329
31.3.4	Théorème de Joachimsthal	330
32	Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications	333
32.1	Suites récurrentes d'ordre 1	333
32.2	Méthode de Newton	336
32.3	Suites récurrentes linéaires d'ordre 2	338
33	Séries à termes réels positifs. Applications	343
33.1	Étude de la convergence	343
33.1.1	Critères de convergence	343
33.1.2	Condition nécessaire de convergence	345
33.2	Quelques outils	346
33.2.1	Test intégral	346
33.2.2	Comparaisons directe et logarithmique	347
33.2.3	Règles de Cauchy et de d'Alembert	349
33.2.4	Règle de Raabe-Duhamel	350
33.3	Formule de Stirling	351
34	Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence	355
34.1	Convergence absolue et semi-convergence	355
34.2	Théorème d'Abel	357
34.3	Opérations sur les séries	359
34.3.1	Commutativité	359
34.3.2	Associativité	360
34.3.3	Distributivité	362
35	Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes. Applications	365
35.1	Normes usuelles	365
35.2	Applications linéaires	367
35.3	Compacité	368
35.3.1	Généralités	368
35.3.2	En dimension finie	369

36	Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation de fonctions	373
36.1	Produit scalaire et orthogonalité	373
36.2	Projection orthogonale	376
36.3	Séries de Fourier	379
37	Parties compactes de \mathbb{R}^n. Fonctions continues sur une telle partie. Exemples et applications	381
37.1	Parties compactes de \mathbb{R}^n	381
37.1.1	Deux définitions équivalentes	381
37.1.2	Caractérisation	383
37.2	Fonctions continues sur un compact	384
37.3	Applications	385
37.3.1	Équivalence des normes en dimension finie	385
37.3.2	Théorème de Rolle	386
37.3.3	Théorème fondamental de l'algèbre	387
37.3.4	Théorème de Riesz	388
38	Théorème des valeurs intermédiaires. Applications	391
38.1	Théorème des valeurs intermédiaires	391
38.2	Applications	394
38.2.1	Théorème des cordes universelles	394
38.2.2	Théorème du point fixe	395
38.2.3	Théorèmes de la moyenne	395
38.2.4	Théorème de Darboux	396
38.2.5	Réciproque du théorème des valeurs intermédiaires	397
39	Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples	399
39.1	Différents modes de convergence	400
39.2	Propriétés de la somme	404
39.2.1	Continuité	404
39.2.2	Intégration	404
39.2.3	Dérivation	405
40	Séries entières d'une variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples	409
40.1	Convergence d'une série entière	410
40.2	Propriétés de la fonction somme	412
40.3	Convergence au bord	415

41 Séries de Fourier d'une fonction périodique. Propriétés de la somme.	
Exemples	419
41.1 Approche géométrique	419
41.2 Convergence uniforme en moyenne de Cesàro	422
41.3 Convergence en moyenne quadratique	425
41.4 Convergence simple	426
41.5 Synthèse et exemples	428
42 Exponentielle complexe. Fonctions trigonométriques. Nombre π	431
42.1 Exponentielle complexe	431
42.2 Fonctions trigonométriques	434
42.3 Résolution de $\sin(z) = a$, où $a \in \mathbb{R}$	436
42.4 Le nombre π en géométrie	437
42.5 Détermination principale du logarithme	438
43 Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications	441
43.1 Cas d'une fonction monotone	441
43.2 Cas d'une fonction à valeurs dans \mathbb{K}	444
43.3 Applications	445
43.3.1 Équivalent des sommes partielles d'une série divergente	445
43.3.2 Constante d'Euler-Mascheroni	446
43.3.3 Formule de Stirling	446
43.3.4 Évaluation du reste d'une série convergente	448
44 Théorème des accroissements finis. Applications	449
44.1 Fonction d'une variable réelle	449
44.2 Fonction de plusieurs variables réelles	452
44.3 Applications	453
44.3.1 Variations d'une fonction	453
44.3.2 Théorème limite de la dérivée	454
44.3.3 Quelques théorèmes	455
45 Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications	459
45.1 Généralités	459
45.2 Caractérisation géométrique	461
45.3 Caractérisation par les pentes	462
45.4 Caractérisation par la dérivée	464
45.5 Applications	465
45.5.1 Classement des moyennes	465

45.5.2	Inégalités de Hölder et Minkowski	465
45.5.3	Intégrale d'une fonction convexe	467
46	Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications	469
46.1	Formule de Taylor-Young	469
46.2	Formules de Taylor-Lagrange	471
46.3	Applications	473
46.3.1	Déterminer une limite	473
46.3.2	Comportement local d'une fonction	474
46.3.3	Développement en série entière	474
46.3.4	Inégalités de Kolmogorov	476
47	Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples	479
47.1	Existence d'une fonction réciproque	479
47.2	Continuité d'une fonction réciproque	480
47.3	Dérivabilité d'une fonction réciproque	481
47.4	Réciproque d'une fonction circulaire	483
47.5	Réciproque d'une fonction hyperbolique	486
48	Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration ou estimation de l'erreur	491
48.1	Méthode des rectangles	491
48.2	Méthode du point milieu	493
48.3	Méthode des trapèzes	494
48.4	Méthode de Simpson	496
49	Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de \mathbb{R} (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples	499
49.1	Présentation de l'intégrale impropre	499
49.2	Propriétés de l'intégrale impropre	502
49.3	Comparaison	505
49.4	Critère d'Abel	507
50	Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications	509
50.1	Intégrale sur un compact	509
50.2	Intégrale impropre	513
50.3	Fonction gamma d'Euler	517
50.4	Transformée de Laplace	518

51 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle de \mathbb{R}, à valeurs réelles ou complexes	519
51.1 Généralités	520
51.2 Résolution de l'équation homogène	522
51.2.1 Connaissant une base de \mathcal{S}_0	522
51.2.2 Méthode de Lagrange	523
51.3 Résolution de l'équation générale	524
51.3.1 Connaissant une solution particulière	524
51.3.2 Méthode de variation des constantes	524
51.4 Problème de raccords	525
51.5 Utilisation des séries entières	526
51.6 Zéros de solutions	528
52 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants. Exemples	529
52.1 Généralités	529
52.2 Solution générale de (E_0)	531
52.3 Solution particulière de (E)	534
52.3.1 Variation des constantes	534
52.3.2 Principe de superposition des solutions	536
52.4 Intervention de l'exponentielle de matrice	537
53 Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité, fonctions de classes \mathcal{C}^1. Exemples	539
53.1 Différentiabilité	539
53.2 Propriétés	543
53.3 Applications continûment différentiables	546
54 Extremums d'une fonction de plusieurs variables réelles	549
54.1 Étude à l'ordre 1	549
54.2 Étude à l'ordre 2	550
54.3 Cas des fonctions de deux variables réelles	553
54.4 Extremum global	555
54.5 Applications	556
54.5.1 La vallée mystérieuse	556
54.5.2 Triangle inscrit dans une ellipse	556
54.5.3 Extremum sur un compact	557

55 Suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli. Variables aléatoires de loi binomiale et approximations de la loi binomiale	559
55.1 Loi de Bernoulli et loi binomiale	560
55.2 Théorème de Bernoulli	562
55.3 Théorème de Stone-Weierstrass	564
55.4 Approximations de la loi binomiale	565
56 Conditionnement et indépendance en probabilités. Exemples	569
56.1 Probabilité conditionnelle et indépendance	569
56.2 Variables aléatoires indépendantes	572
56.3 Variance et covariance	573
56.4 Exemples	577
56.4.1 Probabilités et arithmétique	577
56.4.2 Somme de variables de Poisson	578
57 Espérance, variance. Applications	579
57.1 Espérance et variance d'une variable aléatoire	579
57.2 Quelques lois usuelles	583
57.3 Loi faible des grands nombres	586
58 Variables aléatoires possédant une densité. Exemples	589
58.1 Généralités	589
58.2 Exemples	592
58.2.1 Loi uniforme	592
58.2.2 Loi exponentielle	593
58.2.3 Loi normale	594
58.3 Inégalités	596
59 Intégrales et primitives	597
59.1 Théorème fondamental de l'analyse	597
59.2 Calculs d'intégrales	600
59.2.1 Méthode de l'intégration par parties	600
59.2.2 Méthode du changement de variable	601
59.3 Applications	602
59.3.1 Formule de Taylor avec reste intégral	602
59.3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange	603

60 Inégalités en analyse et en probabilités	605
60.1 En analyse	605
60.1.1 Convexité	605
60.1.2 Classement des moyennes	607
60.1.3 Inégalités de Hölder et Minkowski	608
60.1.4 Projection orthogonale dans un espace préhilbertien complexe .	610
60.1.5 Inégalité des accroissements finis	611
60.2 En probabilités	611
61 Couples de variables aléatoires discrètes. Covariance. Exemples d'application	613
61.1 Généralités	613
61.2 Variance, covariance et corrélation linéaire	614
61.3 Exemples	620
62 Étude métrique des courbes planes	623
62.1 Longueur d'une courbe plane	623
62.2 Abscisse curviligne	625
62.3 Courbure	627
63 Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie	631
63.1 Convergence	631
63.2 Complétude	633
63.3 Compacité	636
64 Fonctions développables en série entière	639
64.1 Généralités	639
64.2 Opérations	642
64.3 Fonctions élémentaires usuelles	644
64.4 Fonction exponentielle complexe	645
64.5 Nombres de Catalan	645
65 Applications linéaires continues, normes associées. Exemples	649
65.1 Caractérisation des applications linéaires continues	649
65.2 Équivalence des normes	651
65.3 Cas des formes linéaires	652
65.4 Cas des applications bilinéaires	652
65.5 Norme subordonnée d'une application linéaire continue	653

66 La fonction Gamma	659
66.1 Étude de la fonction	660
66.2 Propriétés	663
66.3 Équivalents aux bornes	666
Annexes	669
Quelques dérivées usuelles	669
Quelques primitives usuelles	670
Quelques développements limités usuels	671
Quelques formules trigonométriques	672
Plan d'étude d'une courbe paramétrée	673
Plan d'étude d'une courbe polaire	674
Décomposition d'une matrice	675
Diagonalisation et trigonalisation d'une matrice	675
Quelques groupes classiques	676
Groupe cyclique	676
Groupe symétrique	676
Groupe général linéaire	677
Groupe orthogonal	678
Groupe affine	679
Bibliographie	681
Index	683